गणितातील चकवे

पु. ग. वैद्य



गणितातील चकवे



पु. ग. वैद्य



मनोगत

प्रसिद्ध इंग्रजी नाटककार बर्नार्ड शॉ यांना गणित या विषयाबद्दल फार आदर होता. त्यांच्या गणितातील अपुऱ्या ज्ञानाचा दोष त्यांनी त्यांना रुक्षपणे गणित शिकविणारांच्याकडे दिला. वस्तुत: गणित हा विषय रुक्ष नाही. तो विद्यार्थ्यांच्यापुढे रटाळ पद्धतीने मांडला गेल्यामुळे गणित हा विषय रुक्ष म्हणून समजला गेला. लहान वयातच या विषयाबद्दल मुलांच्या मनात अनास्था निर्माण झाली आहे. शाळेतील विद्यार्थ्यांना निरस अशा पाठ्यपुस्तकाखेरीज गणितावर वाचावयास काहीच मिळत नाही. सर्वसामान्य मुलांसाठी पाठ्यपुस्तकाखेरीज गणित विषयावर वाचण्यास मराठीमधून फारशी पुस्तके उपलब्ध नाहीत. हुषार विद्यार्थ्यांना गणित विषयात भरपूर गुण मिळत असतील पण गणित विषयाचे सौंदर्य, त्याची मनोरंजकता सर्वांनाच समजली असेलच असे वाटत नाही. कोणताही विषय शिकताना परीक्षेत त्या विषयात भरपूर गुण मिळविण्यापेक्षाही तो विषय शिकण्याचा आनंद मिळणे अधिक महत्त्वाचे आहे. यासाठी गणित विषयाच्या सौंदर्य दाखविणाऱ्या, त्याच्या मनोरंजकतेची अनुभूती देणाऱ्या बाबींवरील वाड्.मय उपलब्ध असणे आवश्यक आहे. विशेषत: शालेय विद्यार्थ्यांसाठी अशी पुस्तके मोठ्या प्रमाणावर निर्माण होण्याची गरज आहे. याच हेतूने सदर पुस्तिका लिहिण्याचे धाडस मी केले आहे. केवळ हे पुस्तक लिहून न थांबता 'गणित – ज्ञान व रंजन' या मालिकेसाठी आणखी लेखनही तयार आहे. यथावकाश ते प्रसिद्ध होईल. 'गणित – ज्ञान व रंजन' या मालिकेतील 'गणितातील चकवे' हे पहिले पुस्तक आपल्या हाती देताना मला अतिशय आनंद होत आहे.

'गणितातील तर्कदुष्टता' ह्या माझ्या १९६८ साली प्रसिद्ध झालेल्या पुस्तिकेस अतिशय उत्तम प्रतिसाद मिळाला. प्रथमावृत्ती संपल्यावर काही अपरिहार्य कारणांमुळे मागणी असतानाही दुसरी आवृत्ती निघू शकली नाही. या पुस्तिकेत

प्रकाशक
श्याम दयार्णव कोपर्डेकर
इंद्रायणी साहित्य
२७३, शनवार पेठ, पुणे ४११०३०

© सर्व हक्क सुरक्षित

प्रकाशन दिनांक
२२ सप्टेंबर १९९१

मुद्रक
प्रमोद वि. बापट
स्मिता प्रिंटर्स
१०१९, सदाशिव पेठ,
नागनाथ पाराजवळ, पुणे ४११०३०

आणखी बरीच भर घालून व त्याच्या मांडणीतही बदल करून हे पुस्तक तयार केले आहे. गणितातील तर्कदुष्टता हे मॅथेमॅटिकल फॅलसीज् याचे भाषांतर आहे. परंतु तर्कदुष्टता हा शब्द अवघड व बोजड वाटतो असे अनेकांनी निदर्शनास आणून दिले. मलाही ते पटले. म्हणून तर्कदुष्टता ऐवजी चकवा हा शब्द मी वापरला आहे. चकवाऐवजी फसवा हा शब्द वापरण्याचा मला मोह झाला होता, परंतु फसविण्यामधे दुसऱ्याला लुबाडण्याचा हेतू असतो म्हणून तो शब्द मी टाळला. चकविण्यामध्ये गमतीखातर फसविणे असा अर्थ अभिप्रेत धरून चकवा हा शब्द मी स्वीकारला आहे. या पुस्तकात गणितातील नियमांचे महत्त्व पटवून देण्यासाठी गमतीखातर फसवणूक केली आहे. मनोरंजनातून शिकणे हा त्यामागील हेतू आहे.

गणितात अनेक नियम असतात. उदाहरणे सोडविताना या नियमांचे काटेकोरपणे पालन करावे लागते. ज्यांना नियमांचे पालन करायला आवडत नाही त्यांना गणित आवडत नाही, येत नाही. सुसंगतपणा हा गणिताचा आत्मा आहे तर विसंगतपणाशिवाय राजकारण चालू शकत नाही. यामुळे गणित रुक्ष वाटते व राजकारण रम्य वाटते.

'कुत्रे माणसास चावले' अशी बातमी वृत्तपत्रात आल्यास त्याबद्दल आपल्याला त्याचे फारसे महत्त्व वाटत नाही. कारण कुत्र्याने माणसाला चावणे यात विशेष असे काही नाही. जणू ती एक सर्वसधारण घटना आहे. पण 'माणूस कुत्र्यास चावला' अशी बातमी वृत्तपत्रात आल्यास त्याबद्दल आपल्याला गंमत वाटते. कोठे, कशी व का ही घटना घडली याबद्दल कुतूहल निर्माण होते. सर्वसाधारणपणे नियम मोडणे ही गमतीची बाब आहे. गणितात मात्र अशा गोष्टींना थारा नाही. नियम न पाळण्यामुळे चुकीची उत्तरे व मजेशीर अनुमाने पदरी पडतात. ती कशी ते या पुस्तकात दाखविले आहे.

गणितातील नियम हे काटेकोरपणे पाळले गेले पाहिजेत हे ओरडून सांगण्यापेक्षा नियम न पाळल्यामुळे येणाऱ्या मजेशीर अनुमानातून आपली चूक अधिक प्रभावीपणे पटते. यासाठी या पुस्तकात ५० विविध उदाहरणे दिली आहेत. प्रत्येक उदाहरणात गणितातील कोणता तरी एखादा नियम काटेकोरपणे पाळला गेलेला नाही. त्यामुळे विचित्र अनुमान निघाले आहे. अशा प्रकारच्या उदाहरणांना तर्कदुष्टता अथवा तर्कदोष (फॅलसीज) म्हणतात. यालाच मी 'चकवा' असे सोपे

नाव दिले आहे. कोणत्या ठिकाणी कोणता नियम पाळला गेला नाही हे शोधणे म्हणजे करमणूक व शिक्षण दोन्हीही आहेत. नियमपालनातील चूक शोधून काढण्यासाठी उदाहरणातील प्रत्येक पायरी कोणत्या नियमाने केली आहे हे तपासून पाहावे लागते. नियमांचा कीस काढावा लागतो. नियमांचा वापर योग्य की अयोग्य यासंबंधी विचार करावा लागतो. यामुळे नियमांची उजळणी, नियमांचा योग्य वापर करण्याची सवय व करमणूक असे फायदे होतात.

इयत्ता आठवी ते दहावीच्या वर्गातील विद्यार्थ्यांना समजू शकतील अशाच उदाहरणांचा या पुस्तकात समावेश केला आहे. गणिताच्या शिक्षकांनी पाठ्य भाग शिकविताना या पुस्तकातील संबंधित पाठ्यभागास योग्य असणाऱ्या चकव्यांचा वापर करावा. त्यामुळे शिक्षकांचे अध्यापन मनोरंजक तर होईलच शिवाय मुलांना गणितातील नियम पाळण्याचे महत्त्व पटेल. गणित शिकण्याचा आनंदही मिळेल.

या पुस्तकातील प्रत्येक उदाहरण वाचून चूक कोठे आहे ते शोधण्याचा प्रयत्न करा. शेवटी उत्तरे दिली आहेत. कृपया लगेच उत्तर पाहू नका. वारंवार प्रयत्न करा. खरी गंमत उत्तरासाठी झगडण्यात आहे. पाहा तर प्रयत्न करून !

पु. ग. वैद्य
१२०६/८ अ, शिवाजीनगर
पुणे ४११ ००४.

1. तुम्ही कोण आहात ?

सर्वात महत्त्वाचं काय तर आपली ओळख आपल्यालाच पटली पाहिजे. तुम्ही स्वत:ला ओळखता हा तुमचा गैरसमज आहे. काय म्हणता, तुम्ही सहमत नाही ! तर सोडवा हे उदाहरण म्हणजे कळेल आपली लायकी.



जर $x = y$ ... ... (1)

आणि $z = y$ ... ... (2)

तर (1) व (2) वरून

$x = z$

हे मान्य आहे ?

ठीक ; तर याचप्रमाणे

मनुष्य हा प्राणी आहे... ... (3)

गाढव हा प्राणी आहे ... ... (4)

म्हणून (3) व (4) वरून

मनुष्य हा गाढव आहे.

मनुष्य हा गाढव आहे.

आम्ही कोण म्हणोनी काय पुसता ? आम्ही आहो ...

चूक शोधा, नाहीतर

तुम्ही गाढव आहात हे कबूल करा.

तुम्ही गाढव आहात हे तुम्हांला मान्य असल्यास

आमची काहीच हरकत नाही.

उकिरड्यात खुशाल लोळा.

2. अजब यह है गणिती दुनिया !

- दिसतं तसं नसतं म्हणून जग फसतं.
- तुम्हांला वाटते तितकी ही दुनिया सरळ नाही.
- किती अजब दुनिया आहे ते पाहा.

$x = a$ . . . . पक्ष



दोन्ही बाजूस x ने गुणून

$x^2 = ax$

दोन्ही बाजूतून a^2 वजा करून

$x^2 - a^2 = ax - a^2$

$\therefore (x - a)(x + a) = a(x - a)$

दोन्ही बाजूस $(x - a)$ ने भागून

$x + a = a$

$a + a = a$ कारण $x = a$ पक्ष

$\therefore 2a = a$

$\therefore 2 = 1$

2 = 1 ???

साहब, इस अजीब गणितके बारेमें थोडा सोचिये.

करून पाहा खटपट ।

विचार करा पटपट ।

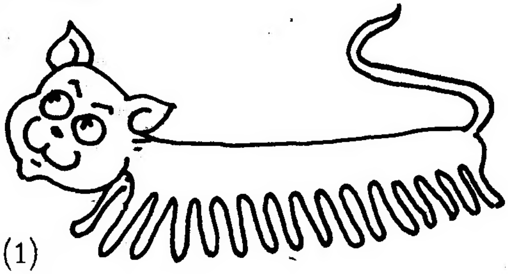
चालणार नाही लटपट ।

डोक्याला आहे कटकट ।

3. काय ????

एका मांजराला सोळा पाय ??????

- तुम्हांला मोजता येतं हा तुमचा **गैरसमज आहे.**
- तुम्ही सरळ हे कबूल करणार नाही.
- वादात वेळ काढू नका.
- पुढील उदाहरण पाहा.



2 मांजरांना = 8 पाय . . . (1)

3 मांजरांना = 12 पाय . . . (2)

(1) व (2) यांचा गुणाकार करून

(2×3) मांजरांना = 8 × 12 पाय

म्हणजेच 6 मांजरांना = 96 पाय

यावरून एका मांजराला = 16 पाय

एका मांजराला 16 पाय ???

खरं म्हणजे सोळा पायांचं मांजर गणितातही नाही. तर हे जादा बारा पाय मांजराला आले कुठून? उत्तर शोधा. मांजराच्या पायानं हळूच पळ काढू नका.

तुम्ही जर हे उत्तर शोधून काढलं नाही तर तुम्हांला चार पाय आहेत व डोके नाही हे आपोआपच सिद्ध होईल.

4. रुपयाचे अवमूल्यन

- बऱ्याच जणांना पैशाची किंमत नसते.
- कारण ते कष्ट न करता फुकट मिळालेले असतात.
- तुमचा पैसा कष्टाचा असेल तर शोधा चूक.



(१) 1 रुपया = 100 पैसे

$\therefore$ $\frac{१}{4}$ रुपया = 25 पैसे

दोन्ही बाजूचे वर्गमूळ काढून

$\frac{१}{2}$ रुपया = 5 पैसे

दोन्ही बाजूस 2 ने गुणून

1 रुपया = 10 पैसे

1 रुपया = 10 पैसे ?

रुपयाचे अवमूल्यन थांबविण्यासाठी आपल्याला काही मदत करता आली तर पाहा. लवकर विचार करा नाहीतर रुपयाची किंमत आणखी घसरेल हं!

तुम्ही स्वस्थ बसलात, मग रुपया आणखी खाली घसरला तर त्यात काय नवल !

(२) 1 रुपया = 100 पैसे

= 10 पैसे × 10 पैसे

= 1/10 रुपया × 1/10 रुपया

= 1/100 रुपया

= 1 पैसा

$\therefore$ 1 रुपया = 1 पैसा

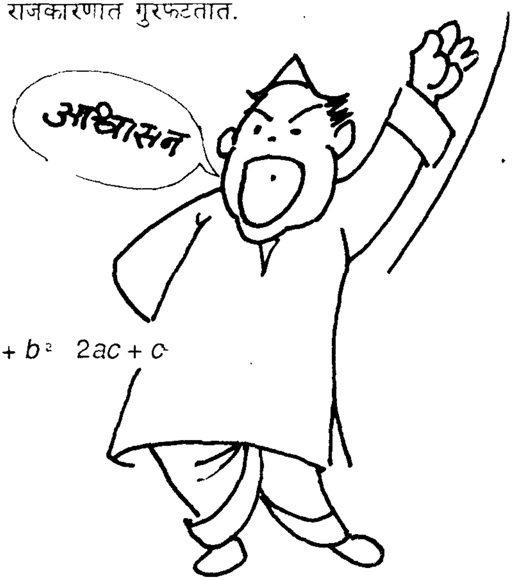
1 रुपया = 1 पैसा

रुपयाचे अवमूल्यन थांबवा नाही तर रुपया द्या.

5. यह सिर्फ राजकारणमेंही हो सकता है ।

- शहाण्या माणसाने राजकारणाच्या भानगडीत पडू नये.
- गणिती प्रवृत्तीला तर याचं वावडं आहे.
- पण शहाणी माणसे अनेक वेळा अकारण राजकारणात गुरफटतात.
- आता हेच बघाना ?

$a + b = 2c$ आणि $a \neq b$ .... पक्ष



दोन्ही बाजूस $a - b$ ने गुणून

$a^2 - b^2 = 2ac - 2bc$

दोन्ही बाजूत $b^2 - 2ac + c^2$ मिळवून

$a^2 \; b^2 + b^2 \; 2ac + c^2 = 2ac - 2bc + b^2 \; 2ac + c^2$

$\therefore a^2 \; 2ac + c^2 = b^2 \; 2bc + c^2$

$\therefore (a - c)^2 = (b - c)^2$

दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ काढून

$a - c = b - c$

$\therefore a = b$

परंतु $a \neq b$ हे दिलेले आहे.

यावरून दोन असमान संख्या समान असतात हे सिद्ध झाले.

दोन असमान संख्या समान असतात ???

सुसंगतपणा हा गणिताचा आत्मा आहे तर विसंगतपणा हा राजकारणाचा आत्मा आहे.

वरील उदाहरणातील राजकारण सकारण शोधा.

6. मद्य न पिणारे दारुडे प्राध्यापक

- दारू पिणे वाईटच.
- पिणारांनाही कळते पण वळत नाही.
- त्यामुळे आपण शुद्धीत नसतानाही आपण शुद्धीवर आहोत हे दाखविण्याचा ते प्रयत्न करतात.
- एक निष्फळ प्रयत्न पाहा.

एका गणिताच्या प्राध्यापक महाशयांचे दारू पिणे त्यांच्या पत्नीला अजिबात आवडत नसे. या विषयावर दोघांचे वरचेवर वादही होत असत. एकदा प्राध्यापक महाशयांनी आपण दारू पित नाही हे गणिताने सिद्ध करून दाखविले.

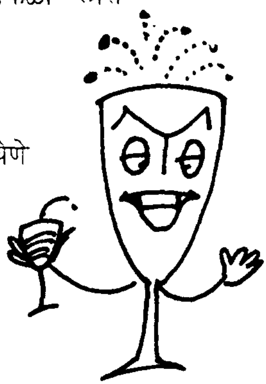
$\frac{1}{2}$ भरलेला ग्लास (दारूचा) = $\frac{1}{2}$ मोकळा ग्लास

दोन्ही बाजूस 2 ने गुणून

भरलेला ग्लास = मोकळा ग्लास.

म्हणून ग्लास भरून दारू घेणे म्हणजे मोकळा ग्लास घेणे

∴ मी दारू पितो म्हणजे पीत नाही.



भरलेला ग्लास = मोकळा ग्लास ???

अर्थात वरील युक्तिवाद त्यांच्या सौ. ना पटणे न पटणे हे त्यांच्या सौ. च्या बुद्धिमत्तेवर अवलंबून आहे. पण तुम्ही जर बुद्धिमान असाल व शुद्धीवर असाल तर वरील युक्तिवादातील चूक शोधून काढा.

7. समानतावादी समाजवादी गणित?

- समाजवाद कोणाला नको ?
- सर्वांना हवा.
- यासाठी सगळेच धडपडतायत.
- पण हा समाजवाद गणितात आला तर काय होईल ते पाहा.

पुढील विधाने सत्य आहेत हे प्रत्यक्ष भागाकार करून अथवा अन्य पद्धतीने पडताळून पाहा.

$$\frac{x-1}{x-1} = \quad . \; . \; . \qquad (1)$$

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \quad \therefore \frac{x^2-1}{x-1} = (x+1) \; . \; . \; . \qquad (2)$$

$$\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} \quad \therefore \frac{x^3-1}{x-1} = x^2+x+1 \; . \; . \; . \qquad (3)$$

$$\frac{x^4-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{x-1} \quad \therefore \frac{(x^4-1)}{x-1} = x^3+x^2+x+1 \; . \; . \; . \qquad (4)$$

वरील (1) ते (4) या मध्ये $x = 1$ ही किंमत टाकण्यास आपल्याला पुढील विधाने मिळतात.

$$\frac{1-1}{1-1} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \qquad (A)$$

$$\frac{1-1}{1-1} = 1+1 = 2 \quad . \; . \; . \qquad (B)$$

$$\frac{1-1}{1-1} = 1+1+1 = 3 \quad . \; . \; . \qquad (C)$$

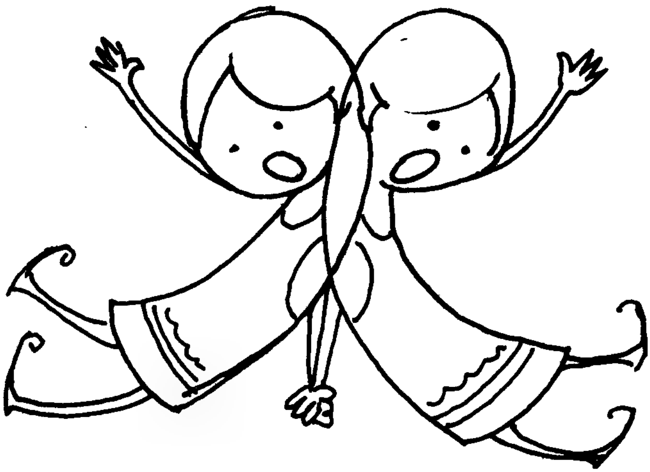
$$\frac{1-1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$ . . (D)

वरील (A), (B), (C), (D) वरून 1=2=3=4

---

1 = 2 = 3 = 4 = ... ????

हा गणितातील समाजवाद तुम्हांस मान्य आहे काय ?



8. हे नवगणित की हे नव्हे गणित ?

- गणित बऱ्याचजणांना अवघड वाटते.
- म्हणून नव-गणित आले.
- पुढे दिलेले नवं गणित तुम्हांला कसं वाटतं ते पाहा.

$$1-3 = 4-6$$

दोन्ही बाजूत $\frac{9}{4}$ मिळवून

$$1-3+\frac{9}{4} = \frac{9}{4}\ 4-6+$$

$$\therefore \left(1-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(2-\frac{3}{2}\right)^2$$

दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन

$$1-\frac{3}{2} = 2-\frac{3}{2}$$

$\therefore$ दोन्ही बाजूत $\frac{3}{2}$ मिळवून

$$1-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\ 2 = 2-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}$$

$$\therefore 1 = 2$$

$$1 = 2\ ???$$

एक बरोबर दोन

आहे हा भास ।

शोधण्याचा घ्या ध्यास

यशस्वी व्हाल खास । प्रयत्नांती ।।

9. करायला गेलो एक ....
आणि झालं भलतंच

तुमचा हेतू चांगला असला तरी नियम पाळले नाहीत तर काय होते ते पाहा.

$9 = 9$

$\therefore (3)^2 = (-3)^2$

$(4-1)^2 = (2-5)^2$

दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ काढून

$4-1 = 2-5$

-1 व - 5 चे पक्षांतर करून

$4+5 = 2+1$

$\therefore 9 = 3$

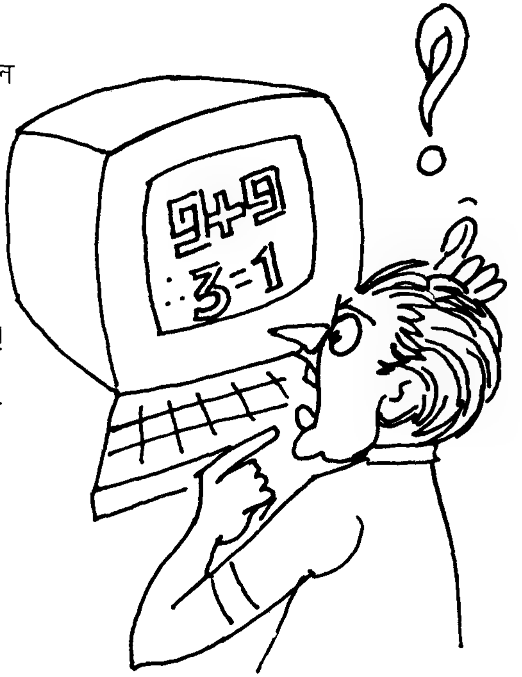
दोन्ही बाजूस 3 ने भागून

$3 = 1$

.... अन् झालं भलतंच !

पण कशामुळं ??? कारण शोधा.

3 =1 ????



गणितातले नियम

नाहीत शोभेसाठी ।

ते आहेत

बरोबर वापरण्यासाठी ।।

10. ऋणाचे ऋण नको !

पुढील उदाहरणातून तुमची गणिताची उमज तपासा.

$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1)$$

$$\therefore \sqrt{\frac{-1}{1}} \qquad \sqrt{\frac{1}{-1}} = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2)$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$ हा नियम वापरुन

$$\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} \quad . \quad : \quad . \quad . \qquad (3)$$

तिरकस गुणाकाराचा नियम वापरून

$$(\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{1})^2 \quad . \quad . \quad . \qquad (4)$$

दोन्ही बाजूंचे वर्ग सोडवून

$$-1 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (5)$$

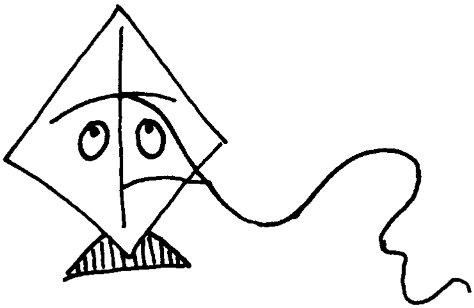
$-1 = 1$???



ऋणाचे ऋण नको
धनकोचे धन नको ।
मला हवे फक्त सत्य
आणि तेही प्रयत्नातून ।
लक्षण हे गणितप्रेमिकांचे
लक्षण हे गणितविद्यार्थ्यांचे ।

11. दिसतं तसं नसतं म्हणून जग फसतं

तुम्ही भाग्यवान आहात. कारण देवाने तुम्हांला डोळे व डोके दिले आहे, पण तुम्हांस ते नीट वापरता येते का नाही ते पुढील उदाहरणात तुमचे तुम्हीच ठरवा.



पक्ष : i) *ABC* हा कोणताही त्रिकोण आहे.
ii) $\angle C$ चा कोनदुभाजक व रेख AB चा लंबदुभाजक P या बिंदूत मिळतात.

साध्य: l (CA) = l (CB)
म्हणजेच Δ CAB हा समद्विभुज त्रिकोण आहे.

रचना : i) PM व PN हे अनुक्रमे बाजू CB व बाजू CA वर लंब काढा.
ii) P, A ; P, B , यांना जोडणारे रेषाखंड काढा.

सिद्धता : (I) Δ PCN व Δ PCM मध्ये,
i) m $\angle$ PNC = m $\angle$ PMC = 90°..... (रचना)
ii) m $\angle$ PCN = m $\angle$ PCM ....
(कारण रेख CP हा $\angle$ ACB चा कोनदुभाजक आहे.)
iii) बाजू PC समाईक.

$\therefore$ को वा को प्रमेयानुसार

$\therefore$ Δ PCN $\cong$ Δ PCM

$\therefore$ l (PN) = l (PM) .. .. (1)

व l (CN) = l (CM) .. .. (2)

II) आता Δ PNA व Δ PMB मध्ये,

(i) m ∠ PNA = m ∠ PMB .. .. .. (रचना)

ii) l (PM) = l (PM) .. .. (वरील (1) वरून)

iii) l (PA) = l (PB) .. ..

(कारण P हा रेख AB च्या लंबदुभाजकावर आहे.)

∴ कर्ण-भुजा प्रमेयानुसार,

Δ PNA ≅ Δ PMB

∴ l (NA) = l (MB) . . . .   (3)

III) वरील (2) व (3) मधील अनुमाने विचारात घेऊ.

l (CN) = l (CM) . . .   (2)

l (NA) = l (MB) . . .   (3)

(2) व (3) यांची बेरीज करून

l (CN) + l (NA) = l (CM) + l (MB)

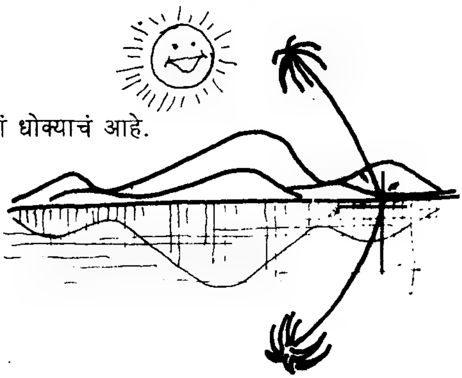
∴ l (CA) = l (CB)

∴ Δ ABC हा समद्विभुज त्रिकोण आहे.

परंतु ABC हा कोणताही एक त्रिकोण दिलेला होता.

∴ प्रत्येक त्रिकोण हा समद्विभुज त्रिकोण असतो.

प्रत्येक त्रिकोण हा समभुज त्रिकोण असतो ???



डोळ्यांनी दिसतं म्हणून त्यावर पूर्ण विश्वास टाकणं धोक्याचं आहे.
डोळ्याला डोक्याची साथ दिल्यास सत्य दिसेल.
लक्षात ठेवा, जर चुकीचे विधान सत्य मानले
तर यावरून दुसरे कोणतेही चुकीचे विधान
सत्य आहे हे दाखविता येते.

12. हे काय फल मम तपाला !

$$
\begin{aligned}
1 &= \sqrt{1} \\
&= \sqrt{(-1) \times (-1)} \\
&= \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \qquad (\text{कारण } \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}) \\
&= (\sqrt{-1})^2
\end{aligned}
$$

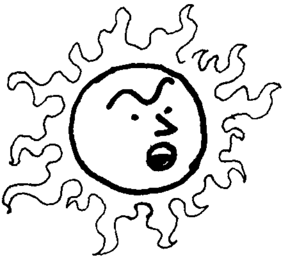
आता उजव्या बाजूचा वर्ग करून

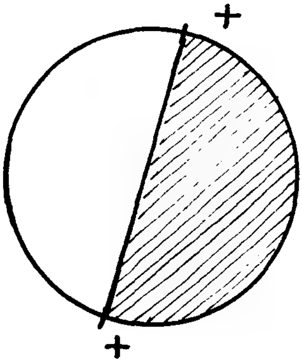
$1 = -1$

$1 = -1$???

बोला, $1 = -1$ हे तुम्हांला मान्य आहे का ?

सगळे नियम व्यवस्थित पाळून तुमच्या परिश्रमाला हे फळ का मिळालं ते शोधून काढा पाहू.

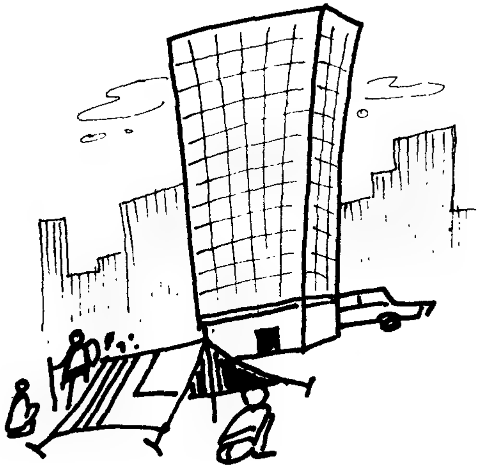






जर धन ऋण झाले समान
तर पृथ्वी अस्मानही होतील समान ।
हे असत्य तर सत्य काय असणार ?
प्रयत्न करा सत्यशोधनाचा । विसरून देहभान ।

13. जय विचित्र गणित !
जय अजब गणित ?



$a + b = 2c$ आणि $a \neq b$

$\therefore a + b = c + c$

b व c चे पक्षांतर करून

$a - c = c - b$

$\therefore a - c = -(b - c)$

दोन्ही बाजूंचा वर्ग करून

$(a - c)^2 = (b - c)^2$

आता दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ काढून

$a - c = b - c$

दोन्ही बाजूत c मिळवून

$a - c + c = b - c + c$

$\therefore a = b$ परंतु $a \neq b$ दिलेले आहे.

यावरुन ......

दोन असमान संख्या समान असतात.

दोन असमान संख्या समान असतात ???

जगातील विषमता घालवून समानता आणणे हे फक्त या विचित्र गणितामुळेच शक्य आहे. परंतु ही समानता चिरकाल नाही. वरील उदाहरणातील चूक शोधताच ही समानता विरघळेल.

14. बाबा, माझं काय चुकलं ???

बंड्याचं बंडल गणित पाहून बंड्याचे बाबा त्याचा गणिताचा अभ्यास घेत होते. बंड्याला 40 ÷ 8 हा भागाकार करायला सांगून बंड्याचे बाबा आंघोळीस गेले. आंघोळीहून आल्यावर त्यांनी बंड्यानं केलेला भागाकार पाहिला तो असा:



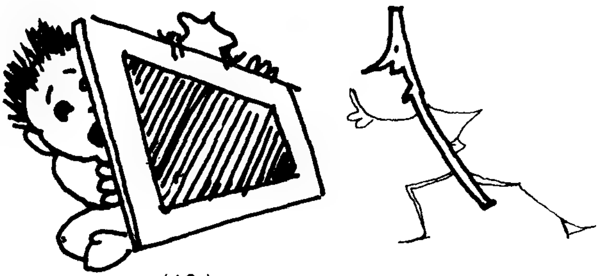
```
8 )  40  ( 41
   - 32
     --
      8
    - 8
     --
      0
```

म्हणून 40 ÷ 8 = 41

हे उत्तर पाहून बंड्याचे बाबा आवावा म्हणून ओरडले. अरे हा काय भागाकार आहे ?
बंड्या, शांतपणे म्हणाला,
बाबा, माझं काय चुकलं ???

40 ÷ 8 = 41 ???

तुम्ही बंड्याचे जानी दोस्त. बंड्यानं बाबांचा मार खायच्या आत त्याला त्याची चूक समजावून सांगा.



15. सर्व संख्या: शून्यांप्रति गच्छति ।

जर $a^x = a^y$ तर $x=y$. हा नियम सर्वांनाच परिचित आहे. याचा उपयोग केलेली पुढील विधाने काळजीपूर्वक अभ्यासा.

$1^2 = 1$ आणि $1^3 = 1$

म्हणून $1^2 = 1^3$

वरील नियमानुसार $2=3$.



याचप्रमाणे

$1^0 = 1^1 = 1^2 = 1^3 = 1^4 =$ .....

म्हणून

$0=1=2=3=4 =$ ....

म्हणजे सर्व संख्यांची किंमत शून्य आहे.
चूक शोधा, नाहीतर शून्य गुण मिळतील.

$0=1=2=3=4=$ .... ???

गणित म्हणजे जादू नव्हे. मात्र गणित शिकल्याने अनेक जादू समजू शकतात. गणिताच्या अभ्यासाने मनाला योग्य तऱ्हेने विचार करण्याची सवय लागते.

16. गण्याचं गंमतशीर गणित

नेहमीच गणितात गडगडणारा गण्या या खेपेला गणितात पास झाल्यामुळे सातवीच्या परीक्षेतही पास झाला. हा काही साधा विजय नव्हता. म्हणून गणोबा धावत मिठाईच्या दुकानात गेला. आनंदाने गोंधळल्यामुळे त्याने पेढ्याऐवजी वर्फीची चौकशी केली.

गणोबा - बर्फी कशी किलो ?

दुकानदार - ३२ रुपये किलो.

गणोबा - सोळा रुपयांची अर्धा किलो बर्फी द्या.

(गणोवांनी अर्धा किलोचे वर्फीचे पार्सल पिशवीत घातले व इथे पेढेही आहेत हे गणोबांच्या लक्षात आले.)

गणोबा - पेढे कसे किलो ?

दुकानदार - ३२ रुपये किलो.

गणोबा - मग १६ रुपयांचे अर्धा किलो पेढे द्या.

गणोबांनी अर्धा किलो पेढ्याचे पार्सल पिशवीत टाकले व अर्धा किलो बर्फीचे पार्सल दुकानदारास परत दिले व तो घराकडे जाण्यास निघाला.

दुकानदार - ए मुला, सोळा रुपये कुणी द्यायचे ?

गणोबा - कसले सोळा रुपये ?

दुकानदार - तू घेतलेल्या अर्धा किलो पेढ्याचे ?

गणोबा - मी बर्फी ऐवजी पेढे घेतले. बर्फी व पेढ्याचा दर एकच आहे. मी बर्फी परत केली आहे.

दुकानदार - मग बर्फीचे पैसे द्या.

गणोबा - मी बर्फी परत केली आहे. विकतच घेतली नाही तर त्याचे पैसे कसे द्यायचे ?

दुकानदार व गणोबाचं भांडण जुंपलं. गणोबा म्हणाले पटवून द्या मग पैसे देतो.

आता तुम्हीच या भांडणात (त्यांची मारामारी सुरू होण्यापूर्वी) मध्यस्ती करा व योग्य तो न्याय द्या.

एक किलो पेढ्याची किंमत शून्य रुपये ???

पेढे घ्या पेढे, शून्य रुपयाला एक किलो पेढे !

17. स्वत:चा खोटा मोठेपणा ?

$x > a$ दिलेले विधान

दोन्ही बाजूस a ने गुणून

$ax > a^2$

दोन्ही बाजूतून x^2 वजा करून

$ax - x^2 > a^2 - x^2$

$\therefore\ x(a - x) > (a + x)(a - x)$

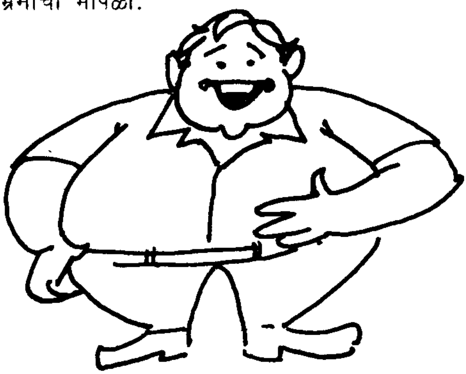
दोन्ही बाजूस $(a - x)$ ने भागून

$x > a + x$

म्हणून $x > x$

म्हणजे प्रत्येक संख्या ही स्वत:पेक्षा मोठी असते ???

स्वत:चा मोठेपणा कुणाला सोडायला आवडेल? पण हा खोटा मोठेपणा आहे तसा तो मोठा खोटेपणाही आहे. गणिताच्या प्रेमात पडलेल्याला तरी खोटा मोठेपणा आवडणार नाही. तर मग फोडा हा भ्रमाचा भोपळा.



18. असं विपरीत घडल्याचं, कोणी ऐकलय तरी का ?

$x > a$ आणि $x > 0$, $a > 0$ .... दिलेले विधान

दोन्ही बाजूस a ने गुणून

$ax > a^2$

दोन्ही बाजूतून x^2 वजा करून

$ax - x^2 > a^2 - x^2$

$x(a - x) > (a - x)(a + x)$

दोन्ही बाजूस $(a - x)$ ने भागून

$x > a + x$

$x > a + a$ कारण $x > a$ दिलेले विधान

म्हणून $x > 2a$

आपण असे सिद्ध केले की,

जर $x > a$ तर $x > 2a$

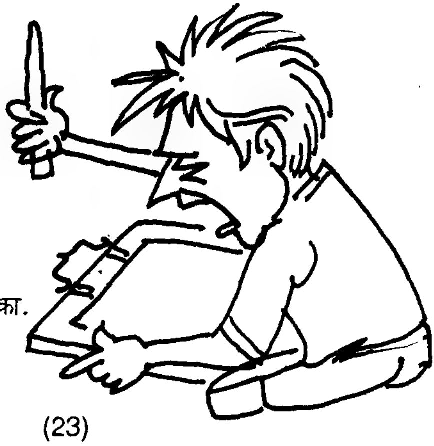
जर $x > a$ तर $x > 2a$???

याचा उपयोग करून आपल्याला पुढील अनुमाने मिळतात.

(i) 10 >9 म्हणून 10 >18

(ii) 8 >5 म्हणून 8 >10

(iii) 17 > 15 म्हणून 17 > 30



हे कधी शक्य आहे का ?

तुम्हांला काय वाटतं ?

हे चूक वाटतं ना ? मग स्वस्थ बसू नका.

चूक शोधायला लागा.

19. जो चुकेल तो शिकेल

$a = b + c$ आणि $a > 0, b > 0, c > 0, a > b$.

दोन्ही बाजूस ($a - b$) ने गुणून

$a(a-b) = (b+c)(a-b)$

$\therefore\ a^2 - ab = ba - b^2 + ca - bc$

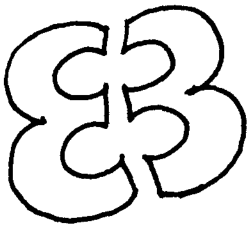
उजव्या बाजूच्या ac चे पक्षांतर करून

$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$.

$\therefore\ a(a-b-c) = b(a-b-c)$

दोन्ही बाजूस $(a - b - c)$ ने भागून

$a = b$. परंतु $a > b$ दिलेले आहे.



म्हणजे जर $a > b$ तर $a = b$???

$\therefore$ दोन असमान संख्या समान असतात.

चूक करणे हा काही मोठा अपराध नाही. आपली चूक कोठे, कशी व का झाली हे समजावून घेणे महत्त्वाचे आहे आणि ती चूक पुन्हा होणार नाही याची खबरदारी घेणे त्याहून महत्त्वाचे आहे. चुकांची कारणमीमांसा ही मार्गदर्शक असते, म्हणून चुकेल तो शिकेल.



20. ऐ कंबक्त, तूने गणित नहीं पिय।

- लहानपणी तुम्ही कधीही न संपणारी गोष्ट वाचली असेल.
- याप्रमाणेच आता एक चमत्कार पाहा.
- दिलेल्या संख्येत एक मिळवा, अगदी कितीही वेळा, तरी ती वाढतच नाही.

$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

दोन्ही बाजूतून 2n +1 वजा करून



$(n+1)^2 - (2n+1) = n^2 + 2n + 1 - 2n - 1$

$\therefore (n+1)^2 - (2n+1) = n^2$

दोन्ही वाजूतून n (2n +1) वजा करून

$(n+1)^2 - (2n+1) - n(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$

$(n+1)^2 - (2n+1)\ (n+1) = n^2 - n(2n+1)$

दोन्ही बाजूत $\frac{(2n+1)^2}{4}$ मिळवून

$$(n+1)^2 - (2n+1)(n+1) + \frac{(2n+1)^2}{4} = n^2 - n(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{4}$$

$$\left[(n+1) - \frac{(2n+1)}{2}\right]^2 = \left[n - \frac{(2n+1)}{2}\right]^2$$

दोन्ही वाजूंचे वर्गमूळ काढून

$$(n+1) - \frac{(2n+1)}{2} = n - \frac{(2n+1)}{2}$$

दोन्ही वाजूतील $-\frac{2n+1}{2}$ उडवून, $n+1 = n$

$n + 1 = n$

म्हणजे संख्या एकने वाढली तर मोठी न होता मूळच्या संख्येबरोबरच राहते.

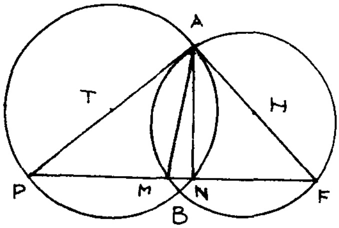
जर एखाद्या संख्येत
एक मिळविला,
तर ती संख्या
मोठी व्हावयास हवी

पण येथे असे न घडता !
ती रुसून बनते लहान !!!
जर हे असेल तुम्हांस मान्य
तर आपण प्यालेले आहात सन्मान्य!

आपण जरा गणित प्या म्हणजे तुमची उतरेल
आणि या चमत्कारामागचे गूढही उकलेल !



21. तुजवीण भूमितीस त्राता कोण?



- गणितात दिलेल्या बाबींची नोंद घ्यावी लागते.
- आणि तीही बारकाईने.
- असं नाही केलं तर काय होते ते पाहा.

पक्ष : (i) T व H केंद्र असलेली दोन असमान त्रिज्येची वर्तुळे A व B या बिंदूत छेदतात.
(ii) रेख AP व रेख AF हे दिलेल्या वर्तुळांचे व्यास आहेत.
(iii) रेख PF ही या वर्तुळांना M व N या बिंदूत छेदते.

साध्य : (i) रेख AM ⊥ रेख PF (ii) रेख AN ⊥ रेख PF

म्हणजेच दिलेल्या एका A या बिंदूपासून दिलेल PF या रेषेला दोन लंब रेषा काढता येतात.

सिद्धता : M हा बिंदू AF व्यास असलेल्या वर्तुळावर आहे. वर्तुळाचा व्यास वर्तुळावरील बिंदूशी 90° मापाचा कोन करतो या गुणधर्मानुसार,

m ∠ AMF = 90° (1)

त्याचप्रमाणे m ∠ ANP = 90° (2)

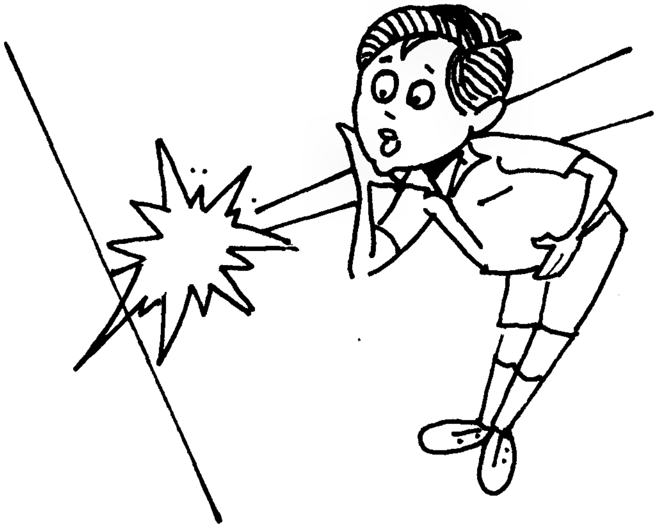
म्हणजेच रेख AM ⊥ रेख PF

आणि रेख AN ⊥ रेख PF

याचा अर्थ A या बिंदूपासून PF या रेषेवर AM व AN असे दोन लंब काढता आले.

रेषेबाहेरील एका बिंदूपासून दिलेल्या रेषेला
दोन लंब रेषा काढता येतात ???

- रेषेबाहेरील एका बिंदूपासून दिलेल्या रेषेवर एकच लंब रेषा काढता येते या तीन हजार वर्षांपूर्वी प्रस्थापित झालेल्या नियमाला वरील उदाहरणाने सुरुंगच लागला आहे.
- यामुळे सारी भूमितीच धोक्यात आली आहे.
- *या प्रसंगी तुमच्याशिवाय भूमितीला त्राता कोण आहे ?*
- तर तुम्हीच शोधा या फसव्याचे उत्तर.



22 तुम्ही नक्की ताळ्यावर आहात काय ?



सोडवा : $\sqrt{5 - x} = 1 + \sqrt{x}$

उत्तर : $\sqrt{5 - x} = 1 + \sqrt{x}$

दोन्ही बाजूचा वर्ग करून

$5 - x = 1 + 2\sqrt{x} + x$

1 व x चे पक्षांतर करून

$4 - 2xz = 2\sqrt{x}$

दोन्ही बाजूस २ ने भागून

$2 - x = \sqrt{x}$

दोन्ही बाजूंचा वर्ग करून

$4 - 4x + x^2 = x$

$\therefore x^2 - 5x + 4 = 0$

$\therefore (x - 4)(x - 1) = 0$

$\therefore x = 4$ व $x = 1$

ताळा : समीकरणाची बीजे समीकरण पूर्ण करतात.
म्हणून 4 व 1 या किंमती x बद्दल दिलेल्या समीकरणात टाकल्यास ते पूर्ण होईल. म्हणजेच डाव्या बाजूची किंमत व उजव्या बाजूची किंमत सारखी येईल.

$\sqrt{5 - x} = 1 + \sqrt{x}$ मध्ये $x = 5$ टाकून

$\sqrt{5 - 4} = 1 + \sqrt{4}$

$\therefore \sqrt{1} = 1 + 2 \therefore 1 = 1 + 2 \therefore 1 = 3$

$\therefore 1 = 3$???

उदाहरण सोडविण्यात चूक आहे, का ताळा पाहण्यात चूक आहे, का तुम्ही स्वत:च ताळ्यावर नाहीत ?

23. उत्तरे बरोबर तर गणित चूक कसे ?

बंड्याचे गणित कच्चे आहे म्हणून बंड्याचे बाबा बंड्याचा गणिताचा अभ्यास घेत होते. बंड्याला त्यांनी पुढील उदाहरणे घातली व ते आंघोळीस गेले.

संक्षिप्त रूप द्या.

(1) $\frac{26}{65}$ (2) $\frac{16}{64}$ (3) $\frac{19}{95}$ (4) $\frac{49}{98}$

बंड्यानं झटकन उदाहरणे सोडविली ती अशी :

(1) $\frac{2\not{6}}{\not{6}5} = \frac{2}{5}$ (2) $\frac{1\not{6}}{\not{6}4} = \frac{1}{4}$

(3) $\frac{1\not{9}}{\not{9}5} = \frac{1}{5}$ (4) $\frac{4\not{9}}{\not{9}8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

बाबा आंघोळीहून आल्यावर बंड्याने सर्व उदाहरणे सोडविल्याचे व त्यांची उत्तरे पुस्तकातील उत्तराप्रमाणे बरोबर असल्याचे सांगितले. बाबांनी मात्र बंड्याने सोडविलेल्या या उदाहरणाची रीत पाहून कपाळावर हात मारून घेतला व म्हणाले,
“ अरे, बंड्या तुला कुणी शिकवलं रे हे गणित ? ”
“ पण बाबा, माझी उत्तरे बरोबर आहेत, मग माझं काय चुकलं ” बंड्या शांतपणे बोलला.

संतापलेल्या बाबांना बंड्याला त्याचं नेमक काय चुकलं ते सांगता येईना. फक्त हे चूक आहे एव्हढं ते म्हणत. पण का चूक हे काही त्यांना सांगता आले नाही.

तुम्ही तर बंड्याचे जिगरी दोस्त ! तर मग मदत करा बरं तुमच्या जानी दोस्ताला, बंड्याची रीत चूक कशी ते समजावून सांगा ना त्याला.

$$\frac{2\not{6}}{\not{6}5} = \frac{2}{5}, \quad \frac{1\not{6}}{\not{6}4} = \frac{1}{4}, \quad ???$$



24. लबाड समीकरण

सोडवा : $\dfrac{x+5}{x-7} - 5 = \dfrac{4x-40}{13-x}$

उत्तर : $\dfrac{x+5}{x-7} - 5 = \dfrac{4x-40}{13-x}$

$$\frac{x+5-5(x-7)}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x}$$

$$\frac{x+5-5x+35}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x}$$

$$\frac{-4x+40}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x}$$

$$\frac{4x-40}{-(x-7)} = \frac{4x-40}{13-x}$$

दोन्ही वाजूस $(4x-40)$ ने भागून

$$\frac{1}{-(x-7)} = \frac{1}{13-x}$$

$\therefore -(x-7) = 13-x$

$-x+7 = 13-x \qquad \therefore \; 7 = 13$

$7 = 13$ .... ???

करायला गेलो समीकरण । गोंधळ झाला अकारण ।
करा त्याचे निराकरण । मठ्ठ ठराल विनाकारण ।

25. विचित्र गुणोत्तराचे चित्र

$$\frac{x+1}{a+b+1} = \frac{x-1}{a+b-1}$$ दिलेले गुणोत्तर

दोन्ही बाजूवर वियोग क्रिया करून

जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{a-b}{b} = \frac{c-b}{d}$ याला वियोग क्रिया म्हणतात

$$\frac{(x+1)-(a+b+1)}{a+b+1} = \frac{(x-1)-(a+b-1)}{a+b-1}$$

$$\frac{x+1-a-b-1}{a+b+1} = \frac{x-1-a-b+1}{a+b-1}$$

$$\frac{x-a-b}{a+b+1} = \frac{x-a-b}{a+b-1}$$

दोन्ही बाजूस $(x-a-b)$ ने भागून

$$\frac{1}{a+b+1} = \frac{1}{a+b-1}$$

म्हणून $a+b+1 = a+b-1$

दोन्ही बाजूतून $a+b$ वजा करून

$1 = -1$ .... ???

विचारांची हिम्मत ।

दाखवेल गंमत ।

नियमांची किंमत ।

समजेल अलबत ।

26. आणि रुपया गायब होतो तेव्हा ....

मना, वना व टोना हे तीन मित्र एकदा जत्रेला गेले. या जत्रेत त्यांनी टाळी वाजवली की दिशा बदलणारी मोटार विकत घ्यायचे ठरविले. प्रत्येक मोटारीची किंमत 10 रुपये होती. प्रत्येकाने एक मोटार घ्यायचे ठरविले. मनाला 50 रु. ची मोड पाहिजे होती म्हणून सर्वांचे पैसे त्यांनीच दुकानदारास दिले. म्हणजे 50 रु. ची नोट देऊन 20 रुपये परत घेतले व ते तीन मोटारी घेऊन चालू लागले. या दुकानात तीन मोटारी एकदम घेतल्यास 5 रुपये सवलत होती. दुकानदार ती देण्यास विसरला होता. त्याच्या हे लक्षात आल्यावर त्याने गड्याजवळ 5 रुपये देऊन त्या मुलांना परत देण्यास सांगितले. गडी मोठा चतुर होता. त्याने दोन रुपये स्वत:जवळ ठेवले व मनाला 3 रुपये सवलतीचे म्हणून परत केले. म्हणजे प्रत्येकाला एक रुपया परत मिळाल्यावर प्रत्येकाला ही मोटार 9 रुपयास पडली. आता पुढील हिशोब पहा.

1) तिघांनी दिलेली मोटारीची किंमत	9 × 3	= 27 रु.
2) गड्याने हडप केलेले पैसे		2 रु.
	एकूण	= 29 रु.

मग तीस रुपयांपैकी एक रुपया कोठे गेला ?

एक रुपया कोणी खाल्ला ???

गड्याशिवाय आणखी कोणी खाल्ला नाही ना हा रुपया ?

लवकर चूक शोधा नाहीतर हा रुपया खाल्याचा आरोप तुमच्यावरच येण्याची शक्यता आहे.

असा आरोप आपल्यावर येऊ नये ही सदिच्छा.

27. बाप दाखवा, नाहीतर श्राद्ध करा.

पुढे दिलेली दोन गुणोत्तरे विचारात घ्या.

$$\frac{x-a+c}{y-a+b} = \frac{b}{c} \quad \text{........ (1) आणि} \quad \frac{x+c}{y+b} = \frac{a+b}{a+c} \quad \text{........(2)}$$

$$\text{जर } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ तर } \frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}$$

हा गुणधर्म वरील (1) व (2) या बाबतीत वापरून,

$$\frac{x-a+c-b}{y-a+b-c} = \frac{b}{c} \quad \text{... (3) आणि} \quad \frac{x+c-a-b}{y+b-a-c} = \frac{a+b}{a+c} \quad \text{..... (4)}$$

वरील (3) व (4) मधील डाव्या बाजू सारख्या आहेत.

म्हणून $\frac{b}{c} = \frac{a+b}{a+c}$ ... ???

परंतु $\frac{b}{c}$ हे $\frac{a+b}{a+c}$ बरोबर नाहीत हे तुम्हांस निश्चित माहीत आहे.

तर $\frac{b}{c} = \frac{a+b}{a+c}$ आणि $\frac{ba+b}{ca+c}$ यापैकी

बरोबर काय ते सांगा, नाहीतर दोन असमान गुणोत्तरे समान असतात हे मान्य करा.

दोन असमान गुणोत्तरे समान असतात ???

गुणोत्तरे दोन समान, होतात कशी असमान ?
करू नका दुरुत्तर, प्रयत्न करा उत्तरोत्तर ।

28. कमाल आहे भाऊ !

$x = 5$ ..... दिलेले विधान

म्हणून $x - 5 = 0$

दोन्ही बाजूस $(x - 9)$ ने गुणून

$(x - 5)(x - 9) = 0 \times (x - 9)$

म्हणून $(x - 5)(x - 9) = 0$

म्हणून $x - 5 = 0$, $x - 9 = 0$

म्हणून $x = 5$, $x = 9$

म्हणून $5 = 9$

5 = 9 ???

पाच बरोबर नऊ
कमाल आहे तुझी भाऊ ।
करू नको याचा बाऊ
उत्तर शोध देतो खाऊ ।



29. धोकेबाज एकसामायिक समीकरणे

सोडवा = $x + y = 5$ व $x + y = 8$

उत्तर = $x + y = 5$ ....(1)

$x + y = 8$ ......(2)

वरील (1) व (2) वरून

5 = 8 .....????

5 = 8 ? सावधान, धोका.

पाच बरोबर आठ । फसवण्याचा आहे हा घाट
यातील युक्तिवाद खोटा । तो मान्य करण्यात आहे तोटा
गणिताच्या तर्काचा मारा सोटा । अन् काढा विसंगतीचा काटा.

चुकीची विधाने गृहीत धरुन त्यापासून काढलेली अनुमानेही चुकीचीच निघतात.



30. राजकारणी लोकांप्रमाणे - संख्याही कुंपणावर बसू लागल्या तर..

$a > 0$ व $n > 0$ या कोणत्याही संख्या असताना, हे स्पष्ट आहे की

$2n - 1 < 2n$ ....

दोन्ही बाजूस $-a$ ने गुणून

$-2an + a < -2an$

दोनही बाजूत $2an$ मिळवून

$-2an + a + 2an < -2an + 2an$

म्हणून $+a < 0$

परंतु $a > 0$ हे दिलेले आहे.

म्हणून a ही संख्या धनही आहे व ऋणही आहे.

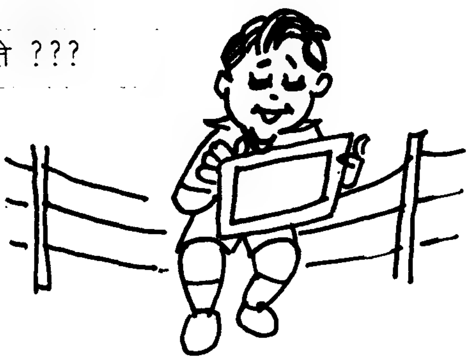
म्हणजेच a ही कोणतीही संख्या धन व ऋण दोन्ही असते.

सावधान !

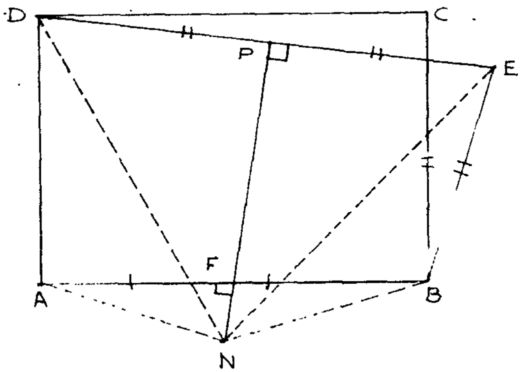
धोका !

प्रत्येक संख्या धन व ऋण असते ???

गणितात असं कुंपणावर बसणं चालणार नाही.
राजकारणात हे नेहमीच चालतं.
मग शोधा बरं या उदाहरणातलं अराजकारण.



31. विशालतेची विशालता कायम राखा.



पक्ष : (i) ABCD हा आयत आहे.

(ii) आयत ABCD च्या बाहेर E हा बिंदू असा घ्या की

l (BC) = l (BE)

(iii) बाजू DE व बाजू AB चे लंबदुभाजक

अनुक्रमे PN व FN हे N या बिंदूत मिळतात.

साध्य : m∠ DAF = m ∠EBF

सिद्धता : Δ AND व ΔBNE मध्ये,

(i) l (AD) = l (BC) ....

कारण l (BE) = l (BC) आणि l (BC) = l (AD)

(ii) l (ND) = l (NE)

कारण N हा रेख DE च्या लंबदुभाजकावर आहे.

(iii) l (NA) = l (NB)

कारण N हा बिंदू रेख AB च्या लंबदुभाजकावर आहे.

∴ बाबाबा प्रमेयानुसार

Δ AND ≅ Δ BNE

m ∠NAD = m∠ NBE ..... (1)

परंतु m ∠ NAF = m ∠ NBF ..... (2)

कारण $\Delta NAF \cong \Delta NBF$

आता (1) मधून (2) वजा करून,

$m\angle NAD - m\angle NAF = m\angle NBE - m\angle NBF$

i. e. $m\angle DAF = m\angle EBF$

परंतु $m\angle DAF = 90^\circ$ व $m\angle EBF > 90^\circ$

म्हणजेच विशालकोनाचे माप 90° असते.

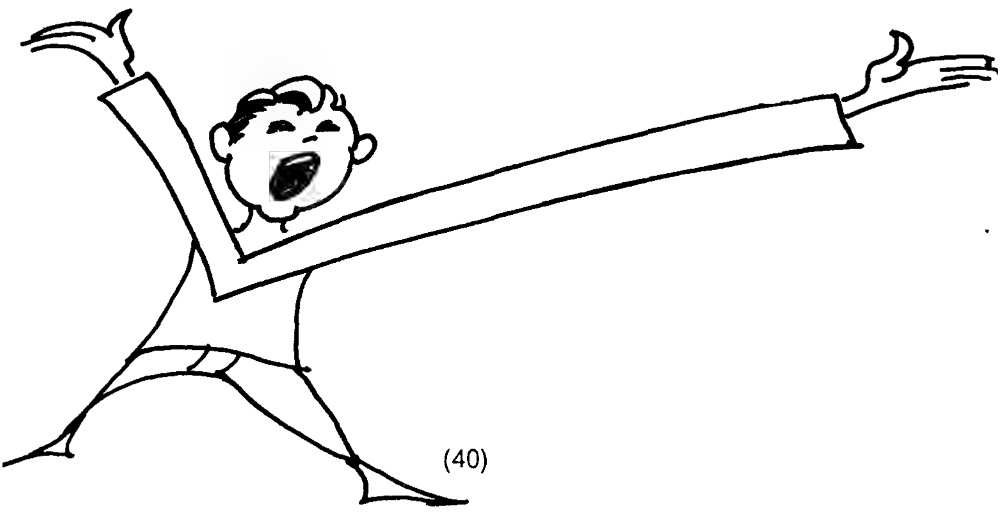
विशालकोनाचे माप $= 90^\circ$???

* * *

आपण यामुळं विशालकोनाची विशालता कमी करत आहोत. हे करणं आपल्याला कमीपणाचंही आहे. विशालतेची विशालता कायम राखण्यासाठी पुढील वचन विसरू नका –

'सत्यसंशोधनात, आकार व आकृती हा मूळ पाया आहे.'

पारेकर



32. छोट्यांना मोठे करण्याचा मोठेपणा तुम्हास हवा काय?

आपल्या सर्वांनाच हे मान्य आहे की,

$$3 > 2$$

दोन्ही बाजूस $\log \frac{1}{2}$ ने गुणून

$$3 \log \frac{1}{2} > 2 \log \frac{1}{2}$$

$m \log n = \log n^m$ या गुणधर्माचा उपयोग करून

$$\log \left(\frac{1}{2}\right)^3 > \log \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

जर $\log x > \log y$ तर $x > y$ याचा उपयोग करून

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^2$$



म्हणून $\frac{1}{8} > \frac{1}{4}$

तुम्हा सर्वांना हे मान्य आहे काय?

अहो, $\frac{1}{8}$ हे $\frac{1}{4}$ पेक्षा लहान आहेत ना?

मग हे राजकारणातल्याप्रमाणे छोट्यांनी हे मोठेपण एकाएकी मिळविण्यामागचं राजकारण शोधा.

$\frac{1}{8} > \frac{1}{4}$???

33. हे मानवा,
धरू नको,
संगती विसंगतीची,



$(-1)^2 = 1$

दोन्ही बाजूचे लॉग घेऊन

$\log (-1)^2 = \log 1$.

$\log 1 = 0$ हा गुणधर्म वापरून

$\log (-1)^2 = 0$

$\log m^n = n \log m$ हा गुणधर्म वापरून

$2 \log (-1) = 0$

दोन्ही बाजूस 2 ने भागून

$\log (-1) = 0$

परंतु $\log 1 = 0$, म्हणून वरील पायरीत $0 = \log 1$ लिहून

$\log (-1) = \log 1$

जर $\log m = \log n$ तर $m = n$ हा गुणधर्म वापरून

$-1 = 1$

$-1 = 1$???

आता $-1 = 1$ ही विसंगती आहे.

विसंगतीची संगती सोडण्यासाठी वरील उदाहरणात काय चुकलं ते शोधा.

34. हे मानवा, कल्याण आहे तुझे नियमपालनात

$1^2 = 1^3 = 1^4 = ... = 1$ हे सर्वांना मान्य आहे.

म्हणून $\log 1^5 = \log 1$ ...... (1)

आणि $\log 1^7 = \log 1$ .... (2)

वरील (1) व (2) वरून

$\log 1^5 = \log 1^7$

$\log m^n = n \log m$ या गुणधर्माचा उपयोग करून

$5 \log 1 = 7 \log 1.$

दोन्ही बाजूस $\log 1$ ने भागून

$5 = 7$ .....

हे चूक आहे हे उघडच आहे.

पण,

ही चूक कुठं झाली ते उघडकीस आणा ना.



$5 = 7$???

हे मानवा,
फक्त गणितात नव्हे,
तर
सदासर्वदा
कल्याण आहे तुझे
नियमपालनात.

35. देवा, माझं काय चुकलं?

सोपे रूप देण्यासाठी बंड्याला त्याच्या बाबांनी पुढील उदाहरणे दिली.

(1) $\frac{15}{8} \div \frac{3}{4}$ (2) $\frac{16}{5} \div \frac{7}{4}$

(3) $\frac{15}{8} \div \frac{6}{8}$ (4) $\frac{64}{20} \div \frac{35}{20}$

बंड्याने उदाहरणे सोडविली व त्याची उत्तरे पुस्तकातल्या उत्तराबरोबर आली म्हणून आनंदाने उडी मारून त्याने गोष्टीचे पुस्तक वाचावयास घेतले. आंघोळ करून आलेल्या बाबांनी बंड्याने सोडविलेली उदाहरणे वाचली ती अशी.

(1) $\frac{15}{8} \div \frac{3}{4} = \frac{15 \div 3}{8 \div 4} = \frac{5}{2}$

(2) $\frac{16}{5} \div \frac{7}{4} = \frac{16 \div 7}{5 \div 4} = \frac{16/7}{5/4} = \frac{16}{7} \times \frac{4}{5} = \frac{64}{35}$

(3) $\frac{15}{8} \div \frac{6}{8} = \frac{15 \div 6}{8 \div 8} = \frac{15}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$

(4) $\frac{64}{20} \div \frac{35}{20} = \frac{64 \div 35}{20 \div 20} = \frac{64/35}{1} = \frac{64}{35}$

बंड्याची उदाहरणे सोडविण्याची रीत पाहून बाबा म्हणाले, "बंड्या, महामूर्खा, गाढवा, अरे रे रे ऽ"

"बाबा, माझं काय चुकलं?" बंड्याने शांतपणे प्रश्न केला.

"बेअक्कल बंड्या, अरे भागिले म्हणजे उलटून गुणिले करायचं हे तुला किती वेळा सांगायचे?"

"बाबा, तुम्ही भागिले म्हणजे उलटून गुणिले हे बरेच बेळा सांगितलं, पण उलटून का गुणायचं हे एकदाही नाही सांगितलंत."

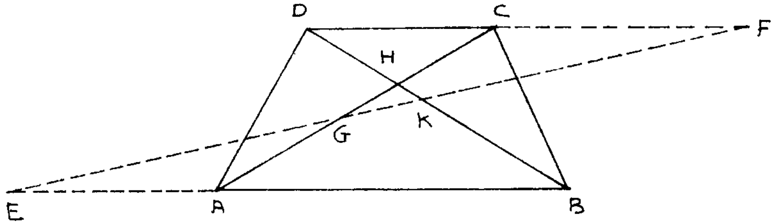
"पुन्हा उलटून बोललास तर थोबाड फोडीन बघं" बाबा बंड्याच्या अंगावर चवताळून गेले.

बंड्यानं डोळे झाकले व तो म्हणाला "देवा, माझं काय चुकलं?"

$$\frac{15}{8} \div \frac{3}{4} = \frac{15 \div 3}{8 \div 4} = \frac{5}{2} \quad ???$$



36. तुम्हांला प्लेटोच्या घरात प्रवेश हवा आहे का?



पक्ष : ABCD हा समलंब चौकोन आहे. बाजू DC II बाजू AB.

साध्य : l (AB) + l (DC) = 0

रचना : (i) कर्ण BD व कर्ण AC काढा. त्यांच्या छेदनबिंदूस H नाव द्या.

(ii) DC वर F बिंदू असा घ्या की (a) D-C-F (b) l (CF) = l (AB)

(iii) किरण BA वर E बिंदू असा घ्या की (a) B-A-E

(b) l (AE) = l (CD).

(iv) रेख EF व कर्ण AC ज्या बिंदूत छेदतात त्याला G नाव द्या.

सिद्धता : (I) समजा l (AB) = x, l (CD) = y, l (AG) = r, l (GH) = s, l (HC) = t

(II) AHB CHD .... (सहज सिद्ध)

$$\therefore \frac{l\,(CD)}{l\,(AB)} = \frac{l\,(CH)}{l\,(AH)}$$

i. e. $\frac{y}{x} = \frac{t}{r+s}$ .... [वरील (I) वरून] ... (1)

(III) AGE $\cong$ CGF ... (सहज सिद्ध)

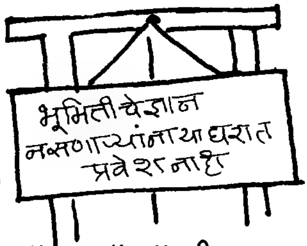
$$\frac{l\,(AE)}{l\,(CF)} \qquad \frac{l\,(AG)}{l\,(CG)}$$

i.e. $\frac{y}{x} = \frac{r}{s+t}$ ... [वरील (I) वरून] .... (2)

(IV) वरील (1) व (2) वरून

$$\frac{y}{x} = \frac{t}{r+s} = \frac{r}{s+t}$$

$$= \frac{t-r}{r+s-s-t}$$ .... (समान गुणोत्तराचा गुणधर्म)



$$\frac{-(r-t)}{r-t}$$

$= -1$ ....(3)

$\therefore \frac{x}{y} = -1 \quad \therefore x = -y \quad \therefore x + y = 0$

परंतु $x = l\,(AB) + l\,(CD) = 0$

समलंब चौकोनाच्या समांतर बाजूंच्या लांबीची बेरीज शून्य असते.

* * *

समलंब चौकोनाच्या समांतर बाजूंची बेरीज शून्य असते ???

वरील विधान मान्य केल्यास तुम्हांला भूमितीची दारे बंद होतील. दार ठोठवा, कडी वाजवा, धडका मारा व भूमितीचे दार उघडा.

"भूमितीचे ज्ञान नसणारांना या घरात प्रवेश नाही", असे प्लेटोने आपल्या घराच्या दारावर लिहून ठेवले होते.

37. हे बालका,
भागाकार करताना,
जपून टाक पाऊल जरा.

$a \neq b$ असताना पुढील उदाहरण पाहा

$a - b = a - b$ .... (1)

$\therefore b - a = b - a$ .... (2)

वरील (1) व (2) ची बेरीज करून

$a - a = b - b$

म्हणून $a\ (1-1) = b\ (1-1)$

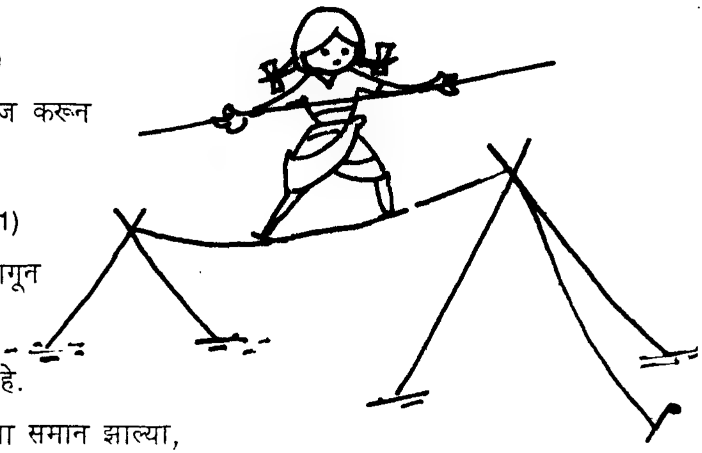
दोन्ही बाजूस (1 −1) ने भागून

$a = b$ .... ???

परंतु $a \neq b$ हे दिलेले आहे.

म्हणजे दोन असमान संख्या समान झाल्या,

तर मग ही विसंगती कशामुळे आली?



जर $a \neq b$ तर $a = b$???

तुमचं पाऊल वाकडं कुठं पडलं
ते शोधून काढा.

38. ऋण संख्येने भागताना सावधान !

$\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

म्हणून $\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}$

दोन्ही बाजूचे लॉग घेऊन

$$\log\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\log m^n = n \log m$ हा नियम वापरून

$$2 \log\left(\frac{1}{2}\right) < \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

दोन्ही बाजूस $\log\left(\frac{1}{2}\right)$ ने भागून

$2 < 1$

$2 < 1$???

भागाकार करताना ठेवा भान ।
नाहीतर कापली जाईल तुमची मान ।
ऋण संख्येने भागताना ठेवा अवधान ।
नाहीतर विसंगत येईल तुमचे अनुमान ।

39. अफवांवर विश्वास ठेवू नका. वस्तुस्थिती जाणून घ्या.

$n^2 + 2n + 1$ व $n^2 + 4n + 4$ या पदावलीमध्ये

$n = -1\frac{1}{2}$ ही किंमत टाकून आपल्याला काय मिळते पाहा.

$n^2 + 2n + 1 = 2\frac{1}{4} \quad -3 + 1 = \frac{1}{4}$ .... (1)

$n^2 + 4n + 4 = 2\frac{1}{4} \quad -6 + 4 = \frac{1}{4}$ .... (2)

वरील (1) व (2) वरून

$n^2 + 2n + 1 = n^2 + 4n + 4$

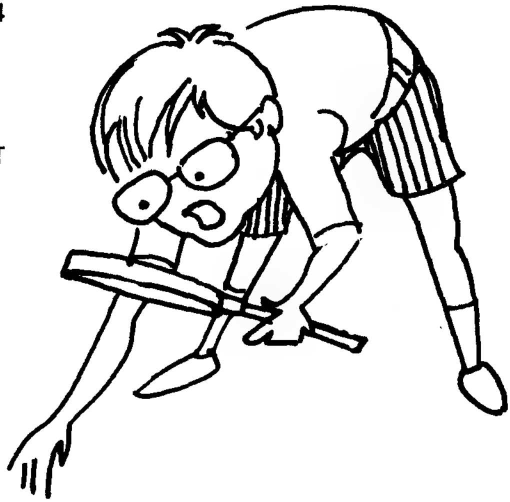
म्हणून $(n+1)^2 = (n+2)^2$

दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन

$n + 1 = n + 2$

$\therefore 1 = 2$

1 = 2 ???



कोणत्याही समस्येचे तपासा मूळ ।
विशेषत: काढताना वर्गमूळ ।
मारा गणितातील नियमांचा रूळ ।
उखडून काढा समस्या समूळ ।

40. समीकरणेच फसवू लागली तर?

सोडवा : $\sqrt{x} + x = 2$

उत्तर : $\sqrt{x} + x = 2$

$\therefore \sqrt{x} = 2 - x$

दोन्ही बाजूंचा वर्ग करून

$x = 4 - 4x + x^2$

$\therefore x^2 - 5x + 4 = 0$

$\therefore (x - 4)(x - 1) = 0$

$\therefore x = 4$ किंवा $x = 2$

ताळा : समीकरणाची बीजे समीकरण पूर्ण करतात हा गणितातील नियम तुम्हांस माहीत आहे. या नियमाप्रमाणे $\sqrt{x} + x = 2$ मध्ये $x = 4$ व 1 टाकल्यास डाव्या बाजूची किंमत उजव्या बाजूच्या किंमतीबरोबर यावयास हवी. तर आता $x = 4$ ही किंमत $\sqrt{x} + x = 2$ मध्ये टाका.

$\sqrt{4} + 4 = 2$

$\therefore 2 + 4 = 2$

$\therefore 6 = 2$

$6 = 2$???

आता 6 = 2 हे चूक आहे हे उघड आहे. मग उदाहरण सोडविण्यात चूक झाली का ते शोधा.

41. चित्रकलाप्रेमीची गणितकला

एका चित्रकला प्रदर्शनास एका चित्रकलाप्रेमी महाशयांनी भेट दिली. त्यांना आवडलेले एक चित्र त्यांनी 100 रुपये देऊन विकत घेतले व ते घरी गेले.

या महाशयांच्या पत्नीला हे चित्र अजिबात आवडले नाही. पत्नीने हे चित्र बदलून दुसरे चित्र आणण्याबद्दल महाशयांना दम भरला.

दुसरे दिवशी हे महाशय विकत घेतलेले चित्र घेऊन परत त्या चित्रकला प्रदर्शनात गेले. तेथे त्यांना आवडलेले दुसरे चित्र त्यांनी घेतले. पण त्याची किंमत होती 200 रुपये. महाशयांनी काल दिलेले चित्र परत केले व हे आवडलेले चित्र घेऊन निघाले.

तेथे असलेल्या विक्रेत्याने महाशयांच्याकडे आणखी 100 रुपयांची मागणी केली.

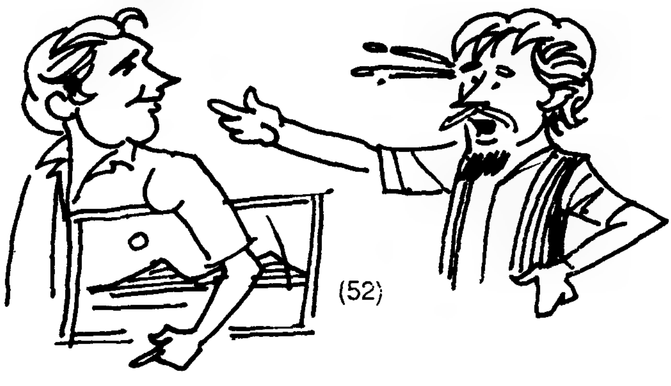
त्यावर महाशय म्हणाले,

"काल मी तुम्हांला शंभर रुपये दिले. आज आत्ताच मी शंभर रुपयाचे चित्र तुम्हाला परत केले. म्हणजे तुम्हांला दोनशे रुपये मिळालेत. आता आणखी कसले पैसे मागता ? "

विक्रेता भांवावला. त्याला काही या महाशयांना त्यांची चूक पटवून देता आली नाही. म्हणून त्याने त्यांच्या व्यवस्थापकांना बोलावून आणले.

समजा तुम्ही ते व्यवस्थापक आहात. या महाशयांची समजूत किंवा चूक काय आहे ते कसे पटवाल ते सांगा. नाहीतर 100 रुपयाचे तुमचे नुकसान होणार आहे ते सोसण्यास तयार व्हा.

दोनशे रुपयांचे चित्र शंभर रुपयाला ???



42. शून्याने भागताना सावधान !

$a = b + c$ ..... (1) दिलेले विधान

(1) च्या दोन्ही बाजूस 5 ने गुणून

$5a = 5b + 5c$ .... (2)

(1) च्या दोन्ही बाजूस 4 ने गुणून व उजव्या डाव्या बाजूची अदलाबदल करून

$4b + 4c = 4a$ .... (3)

(2) व (3) ची बेरीज करून

$5a + 4b + 4c = 5b + 5c + 4a$ ...... (4)

दोन्ही बाजूतून $9a$ वजा करून

$5a + 4b + 4c - 9a = 5b + 5c + 4a - 9a$

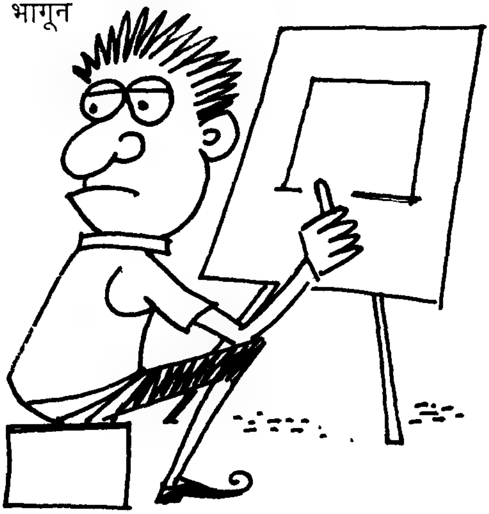
$\therefore -4a + 4b + 4c = -5a + 5b + 5c$

$\therefore 4(-a + b + c) = 5(-a + b + c)$

दोन्ही बाजूस $(-a + b + c)$ ने भागून

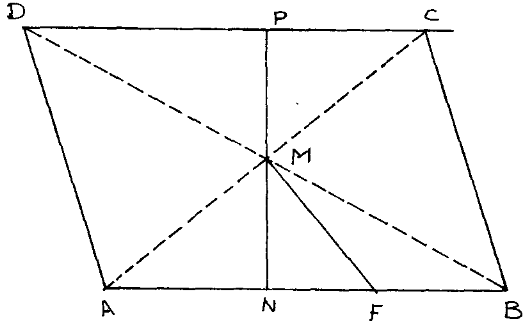
$4 = 5$

$4 = 5$???



गणिताला देऊन लाच
केलेत चाराचे पाच ।
गणिताचा मोडलात कायदा
वाटेल तुम्हांला झालाय फायदा।
पण याच नियमाने
होतील जेव्हा पाचाचे चार
मग उगाच ओरडू नका यार ।

43. गणित राजमें अराजक नहीं चलता



पक्ष : ABCD या चौकोनात $l(AD) = l(BC)$

साध्य : बाजू AB समांतर बाजू

रचना : (i) बाजू DC चा लंबदुभाजक काढा. हा बाजू AB ला ज्या बिंदूत मिळतो त्या बिंदूस N नाव द्या.

(ii) बाजू AB चा लंबदुभाजक काढा.

(a) हा लंबदुभाजक रेख PN ला समांतर अथवा रेख PN शी मिळताजुळता झाला तर बाजू AB समांतर बाजू CD हे सिद्ध झाले.

(iii) तसे नसेल तर तो रेख PN ला ज्या बिंदूत मिळतो त्या बिंदूला M नाव द्या.

(iv) MA, MB, MC, MD रेषाखंड काढा.

सिद्धता : (I) बिंदू M हा बाजू CD च्या लंबदुभाजकावर आहे.

$\therefore$ $m\angle PMD = m\angle PMC$ .... (1)

(II) $m\angle AMN = m\angle PMC$ विरुद्ध कोन

$m\angle BMN = m\angle PMD$ विरुद्ध कोन

वरील (1) वरून

$m\angle AMN = m\angle BMN$ ....(2)

(III) बिंदू M हा बाजू AB च्या लंबदुभाजकावर आहे.

$\therefore$ $m\angle AMF = m\angle BMF$ .....(3)

(IV) वरील (2) व (3) वरून,

रेख MN व रेख MF हे ∠AMB चे दुभाजक आहेत.

परंतु एका कोनास दोन कोनदुभाजक असू शकत नाहीत.

म्हणून रेख MN व रेख MF वेगळ्या नसून एकच असणार.

म्हणजेच बाजू AB व बाजू CD चे लंबदुभाजक एकच आहेत.

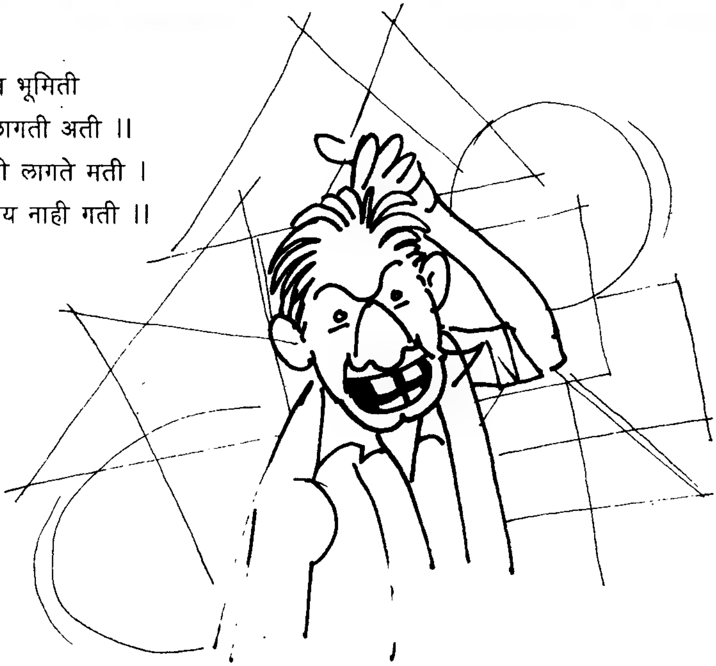
म्हणून बाजू AB समांतर बाजू CD.

यावरून,

जर चौकोनाच्या समोरासमोरील दोन बाजू समान लांबीच्या असतील तर उरलेल्या दोन बाजू समांतर असतात.

जर चौकोनाच्या समोरासमोरील बाजूंची एक जोडी समान लांबीची असेल, तर उरलेल्या दोन बाजू एकमेकीस समांतर असतात ???

सोडवाया भूमिती
प्रयत्न लागती अती ॥
चालवावी लागते मती ।
त्याशिवाय नाही गती ॥



44. नवे पाढे ! बे दूनी पाच ?

$16 - 36 = 25 - 45$ ... (कारण दोन्ही बाजूची किंमत. -20 आहे.)

वरील समानतेच्या दोन्ही बाजूत $-81/4$ मिळवून,

$16 - 36 + 81/4 = 25 - 45 + 81/4$

$\therefore 4^2 \quad 2 \times 2 \times 9/2 + (9/2)^2 = 5^2 \quad 2 \times 5 \times 9/2 + (9/2)^2$

$\therefore (4 - 9/2)^2 = (5 - 9/2)^2$

दोन्ही वाजूंचे वर्गमूळ काढून

$4 - 9/2 = 5 - 9/2$

दोन्ही वाजूत 9/2 मिळवून

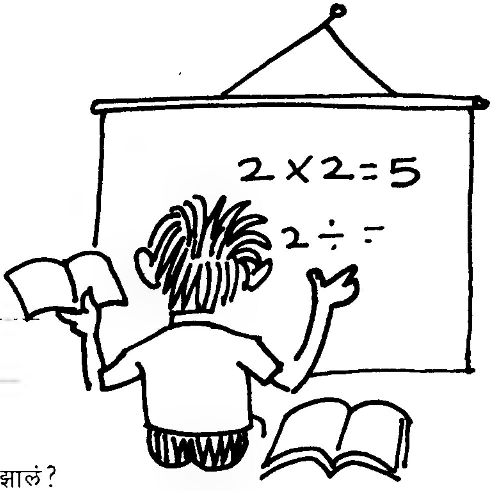
$4 - 9/2 + 9/2 = 5 - 9/2 + 9/2$

$\therefore 4 = 5$

$\therefore 2 \times 2 = 5$

म्हणून झाले वे दूनी पाच.

वे दूनी पाच ???



एकदा काय झालं! काय झालं? काय झालं?

पाढ्यांनी खाल्ली लाच। आणि केले बे दूनी पाच ।

जर गणितानं सोडली अशी लाज । तर जगाचा जाईल सारा माज ।

म्हणून म्हणतो,

काय म्हणताय? बोला लवकर.

म्हणून सांगतो,

जर तुम्हांला असेल थोडी लाज ।

तर उतरवा या लाचखाऊंचा माज ।

45. कुणी कोडे माझे सोडवील का ?

प्रश्न : सोडवा. $3\sqrt{x} + x + 2 = 0$

उत्तर: $3\sqrt{x} + x + 2 = 0$ .... (1)

$\therefore 3\sqrt{x} = -x - 2$

दोन्ही वाजूचा वर्ग करून

$9x = x^2 + 4x + 4$

$\therefore x^2 \;\; 5x = 4 = 0$

$\therefore (x-4)(x-1) = 0$

$\therefore x = 4$ किंवा $x = 1$. हे उत्तर.

- शाब्वास, छान उत्तर काढलेस.
- आता आपले उत्तर वरोबर आहे का ते तपासूया.
- यासाठी समीकरणांची बीजे समीकरणाचे समाधान करतात हा नियम वापरू या. म्हणजे वर आलेल्या x च्या 4 व 1 या किंमती

$3\sqrt{x} + x + 2 = 0$ यामध्ये घालून,

$3\sqrt{4} + 4 + 2 = 0 \therefore 12 = 0$

मला वाटतं, 12=0 या उत्तराने तुम्ही निरुत्तर झाला असाल ?

(II) $x = 1$ ही किंमत $3\sqrt{x} + x + 2 = 0$ यामध्ये घालून,

$3\sqrt{1} + 1 + 2 = 0 \;\; \therefore 6 = 0$

मला वाटतं, 6 = 0 या उत्तराने तुम्ही व समीकरण असे या दोघांचेही समाधान झाले नसणार?

यावरून $x = 4$ किंवा $x = 1$ हे $3\sqrt{x} + x + 2 = 0$ या समीकरणाचे उत्तर नाही हे निश्चित आहे.

तर मग उत्तर काय ?

कुणी माझे हे समीकरण सोडवील का ?

कुणी वरील उत्तरामागील कोडे उकलील का ?

समीकरणाची बीजे समीकरणाचे समाधान करत नाहीत ???

---

46. बँकेतील अफरातफर

एका माणसाच्या बँकेच्या खात्यात 50 रुपये शिल्लक होते. त्याने वेळोवेळी बँकेतून काढलेले पैसे व प्रत्येक वेळी राहिलेली रक्कम शिल्लक पुढे दिली आहे.

1)	रुपये	20	काढले	शिल्लक रुपये	30
2)	रुपये	15	काढले	शिल्लक रुपये	15
3)	रुपये	9	काढले	शिल्लक रुपये	6
4)	रुपये	6	काढले	शिल्लक रुपये	0

काढलेले एकूण रुपये = 50 शिल्लक रुपयांची एकूण = 51

खरं म्हणजे सर्व रुपये काढल्यावर, काढलेले रुपये व शिल्लक रुपये सारखेच यावयास हवेत. मग एक रुपया कोठे पळाला ?

शोधा लवकर, नाहीतर बँकेतील अफरातफरीचा आळ, पैसे न खाताही तुमच्यावर येईल.

काढलेले पैसे = शिल्लक पैसे ???



47. यह क्या हो रहा है ? 2=3?

$4 - 10 = 9 - 15$ ... (1) (∵ दोन्ही बाजूंची किंमत -6 आहे.)

(1) च्या दोन्ही बाजूत $\frac{25}{4}$ मिळवून

$$4 - 10 + \frac{25}{4} = 9 - 15 + \frac{25}{4}$$

$$\therefore 2^2 - 2 \times 2 \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right) = 3^2 - 2 \times 3 \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\therefore \left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2$$

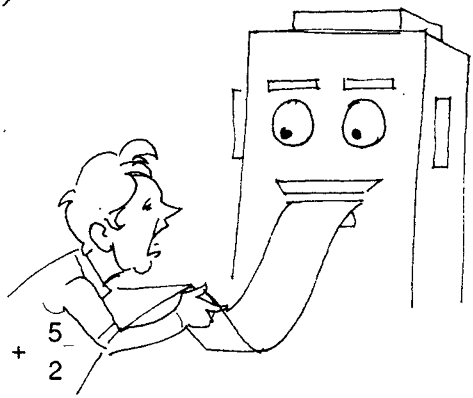
दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ काढून

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}$$

दोन्ही बाजूत $\frac{5}{2}$ मिळवून

$$2 - \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2} + \frac{5}{2}$$

$$\therefore 2 = 3$$



2 = 3 ???

गणित म्हणजे केवळ यांत्रिक पद्धतीने करावयाची आकडेमोड नव्हे. तर तार्किक पद्धतीने विचार करणे होय.

48. शून्याची किंमत ठरवा.

a ही शून्येतर कोणतीही वास्तव संख्या आहे.

आणि $x^2 - ax = -\frac{1}{3}a^2$ ..... (1)

वरील (i) च्या दोन्ही बाजूस $-3a$ ने गुणून

$-3a\ (x^2 - ax) = -3a\ (-1/3a^2)$

$\therefore -3ax^2 + 3a^2x = a^3$

दोन्ही बाजूत $x^3 - a^3$ मिळवून

$x^3 - a^3 - 3ax^2 + 3a^2x = a^3 + x^3 - a^3$

$\therefore\ (x - a)^3 = x^3$

दोन्ही बाजूंचे घनमूळ काढून

$x - a = x$

$\therefore\ -a = 0$

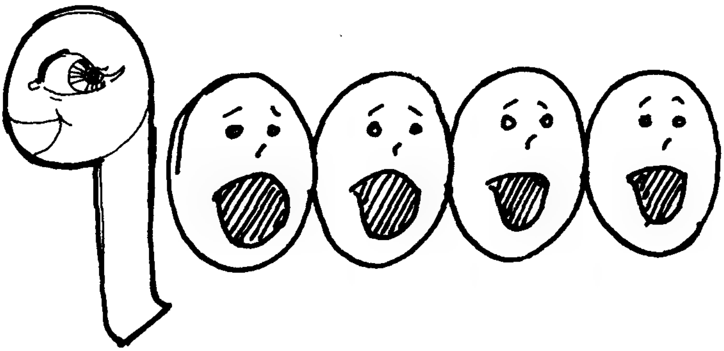
$\therefore\ a = 0$

परंतु ही वास्तव धन संख्या आहे असे दिले आहे.

म्हणजे $a = 0$ आणि $a \neq 0$

ही विसंगती आहे.

शून्येतर संख्येची किंमत शून्य असू शकते ???



49. त्रिकोणमितीही फसवू लागली तर !

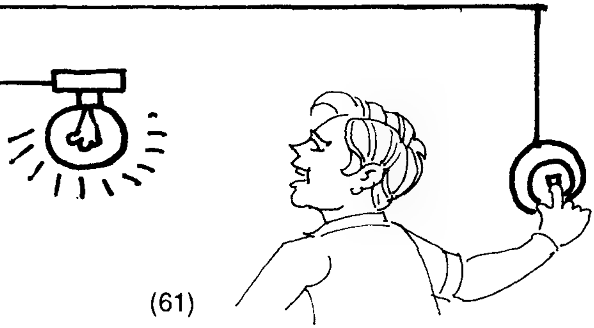
$1 + \sin \pi/4 - \cos \pi/4 = \tan \pi/4$ .... दिलेले विधान
($\sin \pi/4 = \cos \pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ व $\tan \pi/4 = 1$ या किंमती घालून वरील विधान सत्य आहे हे तुम्ही पडताळून पाहू शकता.)

$$\therefore \quad 1 + \sin \pi/4 - \cos \pi/4 = \frac{\sin \pi/4}{\cos \pi/4}$$

$\therefore \cos \pi/4 + \sin \pi/4 \cos \pi/4 - \cos^2 \pi/4 = \sin \pi/4.$
डाव्या बाजूच्या $\cos \pi/4$ चे पक्षांतर करून
$\sin \pi/4 \cos \pi/4 - \cos^2 \pi/4 = \sin \pi/4 - \cos \pi/4$
$\therefore \cos \pi/4 (\sin \pi/4 - \cos \pi/4) = \sin \pi/4 - \cos \pi/4$
दोन्ही बाजूस ($\sin \pi/4 - \cos \pi/4$) ने भागून
$cas\ \pi/4 = 1$
$\therefore \pi/4 = 0$ (कारण $\cos 0° = 1$)

$\pi/4 = 0$???

गणिताचे स्वरूप विद्युतमंडळासारखे आहे. विद्युतमंडळातील सर्व जोडण्या व्यवस्थित आहेत व फक्त एकच जोडणी जरा सैल असेल तर दिवा लागत नाही. फक्त एकच जोडणी थोडी सैल आहे तेव्हा दिव्याने थोडे लागायला काय हरकत आहे? हा युक्तिवाद गणितालाही लागू आहे. कोणत्याही पायरीवर एक बारीक चूक झाली तरी गणित चुकते.



50. चुकांचे मूळ आहे वर्गमुळाच्या मुळात.

- कोणी कोणाच्या मुळावर येऊ नये हे चांगलेच.
- पण चुकांचे मूळ शोधण्यासाठी हे करणे जरुरीचे आहे.

$cos^3 x = (cos^2 x)^{3/2}$

$\therefore\ cos^3 x = [1-sin^2 x]^{3/2}$

दोन्ही बाजूत 3 मिळवून व दोन्ही बाजूंचा वर्ग करुन,

$[cos^3 x+3]^2 = [(-1\text{-}sin^2 x)^{3/2}+3]^2$

दोन्ही बाजूत $x=\pi$ ही किंमत टाकून

$[cos^3 \pi+3]^2 = [(1-sin^2 \pi)^{3/2}+3]^2$

$cos\,\pi = -1$ व $sin\,\pi = 0$ या किंमती टाकून,

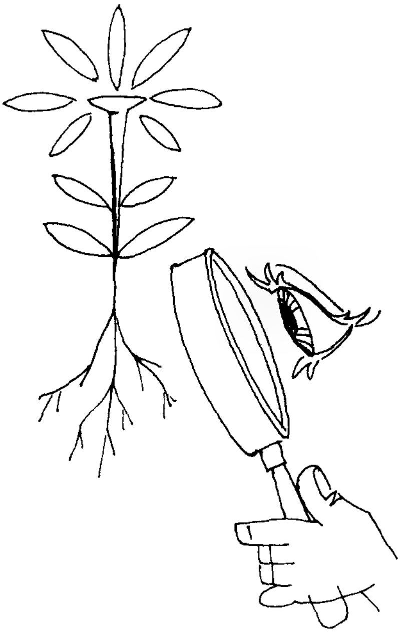
$[(-1)^3+3]^2 = [(1-0^2)^{3/2}+3]^2$

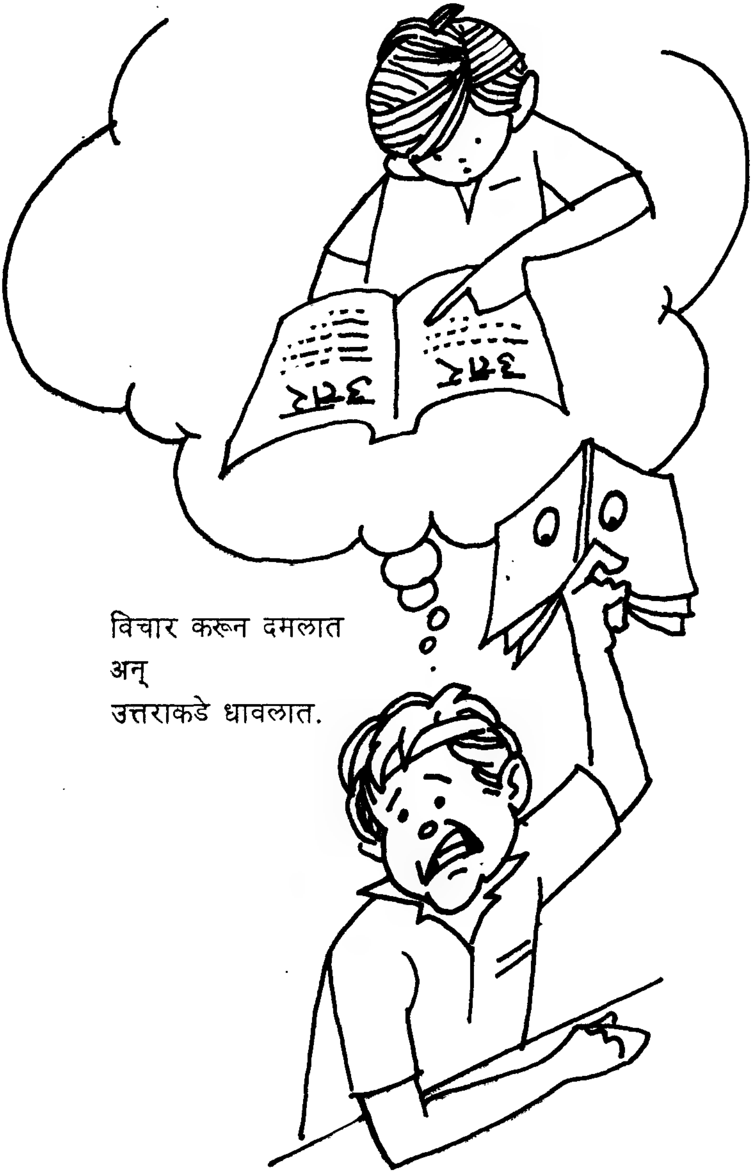
$\therefore\ [-1+3]^2 = [1+3]^2$

$\therefore\ 2^2 = 4^2$

$2^2 = 4^2$???

विवेके क्रिया आपुली पालटावी ।
अति आदरें शुद्ध क्रिया धरावी ।।
— श्रीसमर्थ रामदास





विचार करून दमलात
अन्
उत्तराकडे धावलात.

(1) जर $x=y$ व $z=y$, तर $x=z$ हे अनुमान संख्यांच्या बाबतीत सत्य आहे. म्हणजे येथे x, y, z या सर्व संख्या आहेत.

मनुष्य हा प्राणी आहे व गाढव हा प्राणी आहे म्हणून मनुष्य व गाढव हे दोघेही प्राणी आहेत असे अनुमान योग्य होईल. म्हणजे दोन विधानातील सामान्य गुणधर्म प्राणी असणे याची समानता आहे असे म्हणणे योग्य आहे.

अशा प्रकारचे आणखी एक उदाहरण पाहा.

सदाची उंची = गोविंदाची उंची

सुमनची उंची = गोविंदाची उंची

म्हणून सदा व सुमनची उंची सारखी आहे असे अनुमान काढणे योग्य होईल.

परंतु सदा म्हणजे सुमन म्हणून पुरुष म्हणजे बाई अशा प्रकारचे अनुमान हास्यास्पद होईल.

समानतेचा संदर्भ लक्षात घेणे हे अत्यंत महत्त्वाचे आहे.

एखादी संकल्पना व तिचे माप यांची स्पष्टता नीट यावी म्हणून रेपाखंड व रेपाखंडाची लांबी हे आपण अनुक्रमे रेख AB व l(AB) असे दाखवितो. गणितात समानता याचा अर्थ दोन्हीही एकच असा आहे. आपण जेव्हा रेख AB = रेख CD असे लिहितो याचा अर्थ रेख AB व रेख CD एकच आहेत असा होतो. वस्तुत: आपल्याला असे म्हणायचे नाही. आपल्याला त्यांच्या लांबीची समानता अपेक्षित आहे. म्हणून l(AB) = l(CD) असे मांडणे सोईचे. परंतु एकदा संकल्पना व त्याचे माप याची स्पष्टता झाली की, पुढे संदर्भाने रेख AB = रेख CD याचा अर्थ आपण लांबीच्या बाबतीतील समानता असाच घेतो. म्हणजे संकल्पना, तिचे माप यांच्या संदर्भात समानतेसंबधीत अनुमाने काढावीत.

(2) या चकव्यामधील चूक दोन्ही बाजूस $(x-a)$ ने भागण्यात झाली आहे. $x=a$ असल्याने, $x-a=0$. त्यामुळे दोन्ही बाजूस $(x-a)$ ने म्हणजे आपण शून्याने भागत आहोत.

गणितात शून्याने भागता येत नाही असा नियम असताना आपण दणकून भागले त्यामुळे विसंगत अनुमान आले आहे.

आता शून्याने का भागायचे नाही त्याचा विचार करूया.

सुसंगतपणा हा गणिताचा आत्मा आहे. सुसंगतपणा सांभाळण्यासाठी ज्यायोगे विसंगती येईल अशा बाबी करण्यास आपण बंदी आणतो. गणितातच नव्हे तर व्यवहारातही आपण हेच करतो. आता शून्याने भागावयास परवानगी

दिली तर विसंगती कशी येते ते पाहू.

$0x3 = 0x5$ ... (कारण दोन्ही बाजूंची किंमत शून्य आहे.)

दोन्ही बाजूस शून्याने भागून

$$\frac{0x3}{0} = \frac{0x5}{0}$$

$$\therefore\ 3 = 5$$

याचा पद्धतीने आपण सर्व संख्या समान आहेत असे दाखवू शकतो. पण सर्व संख्या सारख्या नाहीत हे आपणच ठरविले आहे. शून्याच्या भागण्यामुळे याला बाधा येते. आणि म्हणून सुसंगती राखण्यासाठी ज्यायोगे विसंगती आली त्यावर बंदी घालणे योग्य होईल. म्हणून शून्याने भागण्यावर गणितात बंदी आहे.

गणित हे मनुष्यनिर्मित शास्त्र आहे. आपण सुरवातीला काही बाबी गृहीत धरतो. या गृहीताच्या साहाय्याने काही सिद्धान्त मांडतो. हे सिद्धान्त वापरून काही प्रश्न सोडवितो. आपले प्रश्न सुटले तर आपली गृहीतके व संबंधित मांडणी याला मान्यता मिळते. हे सर्व नियम आपणच आपले प्रश्न सोडविण्यासाठी करतो. हे करताना नियमांमध्ये सुसंगती असणे अत्यंत आवश्यक आहे. ज्यायोगे विसंगती येईल अशी गृहीतके अथवा नियम स्वीकारता येणार नाहीत; उदा. शून्याने भागावयास परवानगी दिल्यास काय हलकल्लोळ उडतो हे आपण वर पाहिले आहेच. सुसंगती हा गणिताचा आत्मा आहे. डॉ. व्ही. एस. हुजुरबझार याबाबत असे म्हणाले आहेत की,

"A true mathematician cannot be a successful politician. Because a mathematician calls a spade, a spade while a politician calls if sometimes spade and sometimes something else."

आता शून्याने का भागता येत नाही यासंबंधी आणखी एक विचार पाहा. यासाठी आपण प्रथम भागणे या क्रियेचा विचार करूया.

$8 \div 2$ याची किंमत काढताना आपण 2 ला कशाने गुणले असता 8 मिळतात हे शोधतो.

$2 \times 4 = 8 \ \therefore 8 \div 2 = 4$

म्हणजेच $8 \div 2 = 4$ कारण $2 \times 4 = 8$

आता $8 \div 0$ याची किंमत काढताना आपण शून्याला कशाने गुणले असता 8

मिळतात हे शोधू या.

0 x ? = 8. आणि आपल्याला अशी संख्या मिळत नाही की जिने शून्याला गुणले असता 8 मिळतात. याचाच अर्थ 8 ÷ 0 याची किंमत दर्शविणारी संख्या आपल्याला मिळू शकत नाही. हेच आपण वेगळ्या शब्दात शून्याने भागता येत नाही किंवा भागण्यास बंदी आहे असे म्हणतो.

(2) या चकव्यातील चूक '(1) व (2) यांचा गुणाकार करून' या तिसऱ्या पायरीवर आहे. असा गुणाकार करण्यात चूक काय आहे ते पाहा.

(1) व (2) यामध्ये, डावी बाजू ही मांजरांची संख्या व उजवी बाजू ही त्यांच्या पायांची संख्या आहे हे ध्यानात घ्यावे. म्हणजे जसे 1 मीटर बरोबर 100 सेंमी. तसे एक मांजर बरोबर 2 पाय असा हा परिमाणांचा संबंध आहे. आपण वर्ग, घन, वर्गमूळ, घनमूळ, गुणाकार वगैरे क्रिया संख्यांवर करतो. अशा वेळी समानतेतील दोन्ही बाजूंच्या संख्या समान असणे आवश्यक आहे. इथे प्राप्त झालेली समानता परिमाणांमुळे आहे. त्यामुळे अशा क्रिया त्यावर करणे चुकीचे आहे. परंतु दोन्ही बाजूंची एकच पट केली तर हरकत नाही. कारण यामुळे आपण दोन्ही बाजूची परिमाणातील संबधांचे प्रमाण कायम ठेवत असतो.

उदा. 1 किलोग्रॅम = 1,000 ग्रॅम

∴ 5 किलोग्रॅम = 5,000 ग्रॅम ... (A)

∴ 10 किलोग्रॅम = 10,000 ग्रॅम ... (B)

याप्रमाणे पट केल्यामुळे परिमाणातील प्रमाण कायमं राहत असते.

परंतु वरील (A) व (B) याचा गुणाकार केल्यास,

50 किलोग्रॅम = 5,00,00,000 ग्रॅम

∴ 1 किलोग्रॅम = 10,00,000 ग्रॅम हे चुकीचे अनुमान मिळते.

अशाच चुकीच्या क्रियेमुळे मिळणारे आणखी एक उदाहरण पाहा.

1 माणसाला = 2 पाय ... (C)

4 माणसांना = 8 पाय ... (D)

वरील (C) व (D) चा गुणाकार करून

4 माणसांना = 16 पाय

∴ 1 माणसाला = 4 पाय

म्हणजे यामुळे आपण सर्वजण जनावरे ठरत आहोत.

समानतेचा नेमका अर्थ व संदर्भ लक्षात घेऊन त्यावरील क्रिया करणे

आवश्यक आहे.

(4) (i) याही चकव्यातील चूक क्रमांक 3 मधील चकव्याप्रमाणे तिसऱ्या पायरीतील 'दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ काढून' येथे आहे. वरील (3) मध्ये याचे सविस्तर विवेचन केले आहे. अशी चूक केल्यामुळे मिळणारा आणखी एक चकवा पाहा.

1 मीटर = 100 सेंटिमीटर

∴ $\frac{1}{4}$ मीटर = 25 सेंटिमीटर

दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ काढून

$\frac{1}{2}$ मीटर = 5 सेंटिमीटर

∴ 1 मीटर = 10 सेंटिमीटर

(ii) या चकव्यातील चूक दुसऱ्या पायरीत 100 पैसे = 10 पैसे × 10 पैसे हे लिहिण्यात आहे. पैशांनी पैशांना गुणता येत नाही, तर संख्येने संख्येला गुणता येते. म्हणून हे विधान 100 पैसे =(10 ×10) पैसे असे हवे. 10 × 10 या गुणाकाराचे परिमाण पैसे आहे. याच प्रकारचा आणखी एक चकवा पाहा.

1 किलोग्रॅम = 1000 ग्रॅम

= 10 ग्रॅम × 100 ग्रॅम

= 1/100 किलोग्रॅम × 1/10 किलोग्रॅम

= 1/100 × 1/10 किलोग्रॅम

= 1/1000 किलोग्रॅम

= 1 ग्रॅम

∴ 1 किलोग्रॅम = 1 ग्रॅम.

(5) या चकव्यामधील चूक $a-c=b-c$ या पायरीत आहे. ही पायरी वर्गमूळ काढल्यावर मिळाली आहे. वर्गमूळ काढल्यावर ही पायरी $a-c=\pm(b-c)$ अशी हवी. ± ही चिन्हे घेतल्यामुहे दोन अनुमाने मिळतात. $a-c=-b-c$ i.e. $a=b$ किंवा $c=-(b-c)$ i.e. $a+b=2c$ यांपैकी सुसंगत अनुमान आपण घ्यावयाचे असते.

आपण आता असे का घडते याचा विचार करूया.

समीकरणाच्या बाबतीत आपण ज्यावेळी वर्ग करतो त्यावेळी मूळच्या समीकरणाचा सत्यता संच हा विस्तारीत होतो. x व $-x$ या दोघांचाही वर्ग x^2 असतो. आपण एक उदाहरण पाहू. समजा $x = -2 \therefore x^2 = 4$ आता $x^2 = 4$ हे समीकरण $x = -2$ चा वर्ग करून झाल्यामुळे त्याचा सत्यता संच विस्तारीत झाला. कारण $x^2 = 4$ हे समीकरण $x = 2$ याचा वर्ग करूनही मिळते. $x^2 = 4$ $\therefore x = 2$ असे अनुमान घेतल्यास आपल्या $x = -2$ याच्याशी ते विसंगत आले. म्हणून $x^2 = 4$ तर $x = \pm 2$ असे मांडून या विस्तारीत सत्यता संचातील सुसंगत किंमती घ्याव्यात.

वर्गमूळ काढताना वर्गमुळाच्या धन व ऋण चिन्हांचा विचार करण्याची आवश्यकता आहे. आता एक फरक नीट लक्षात घ्या.

- वर्गमूळ 4 = ± 2 पण $\sqrt{4} = 2$. $\sqrt{}$ या चिन्हांचा अर्थच धन वर्गमूळ असा आहे.

(6) या चकव्यातील चूक ही पहिल्या चकव्याप्रमाणे आहे. भरलेला ग्लास = मोकळा ग्लास हे अनुमान घनफळाच्या संदर्भात बरोबर आहे. ग्लास भरला असतानाचे दारूचे आकारमान व ग्लास मोकळा असतानाचे मोकळ्या ग्लासाचे आकारमान सारखे आहे हे अगदी उघड आहे. याचाच उपयोग करून आपण द्रव पदार्थ मोजण्याची मापे तयार केली आहेत.

समानतेचा संदर्भ लक्षात घेणे महत्त्वाचे असते.

अशा प्रकारचे आणखी एक उदाहरण पाहा.

$\frac{1}{2}$ दरवाजा बंद = $\frac{1}{2}$ दरवाजा उघडा

दोन्ही बाजूस 2 ने गुणून

दरवाजा बंद = दरवाजा उघडा.

म्हणून बंद असलेला दरवाजा उघडा समजून घरात जाऊ लागला तर तुमचा कपाळमोक्ष होईल. याही ठिकाणी दरवाजा बंद असताना दरवाजाने बंद केलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ व दरवाजा उघडल्यावर दरवाजाने मोकळ्या केलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ सारखे आहे.

(7) या चकव्यातील चूक, A,B,C,D या सर्व विधानांच्या डाव्या बाजू 1-1 /2-2 आहेत. यावरुन आपण उजव्या बाजूची मांडलेली समानता होय.

1-1/11 = 0/0. आता 0/0 हे गुणोत्तर संदिग्ध (Indeterminate Form) आहे. छेदस्थानी 0 आल्यामुळे 0/0 अशा प्रकारच्या संख्यांना निश्चित अर्थ देता येत नाही. (याचे कारण चकवा क्र. 2 च्या उत्तरात सविस्तर दिलेले आहे. आवश्यक वाटल्यास ते पाहावे.) ज्यांची किंमत निश्चित करता येत नाही अशा संख्यांच्या समानतेवरुन अनुमान काढणे चूक आहे. 0/0 ची किंमत माहीत नसल्यामुळे दोन संख्यांची किंमत 0/0 बरोबर असेल, तर त्या संख्या एकमेकीबरोबर आहेत असे धरता येणार नाही. हीच चूक या चकव्यात आहे.

0/0 अशा गुणोत्तराविषयी जास्त माहिती कॅलक्युलसमधील लिमीट या प्रकरणात तुम्हांस मिळू शकेल. मराठीमध्ये गॅनवाच कॅलक्युलस हे प्रा. म. रा. राईलकर यांचे पुस्तक वाचावे.

(8), (9) या चकव्यातील चूक वर्गमूळ घेताना धन व ऋण दोन्ही चिन्हे न घेता फक्त धन चिन्ह घेतल्यामुळे झाली आहे. सविस्तर विवेचनासाठी चकवा 5 चे उत्तर पाहा.

(10) $\sqrt{-1}$ ही वास्तव संख्या नाही. इमॅजिनरी संख्या आहे. वास्तव संख्यांना लागू असणारे सर्व नियम इमॅजिनरी संख्यांनाही लागू पडतीलच असे नाही. चूक पायरी (3) मध्ये आहे.

(11) या उदाहरणातील आकृती चूक आहे. प्रत्यक्ष आकृती काढल्यास असे दिसून येईल की $\angle c$ चा कोनदुभाजक व रेख AB चा लंबदुभाजक हे त्रिकोणाच्या आत न मिळता बाहेर मिळतात. त्यामुळे आकृती वेगळी येते. मग उदाहरणातील सिद्धता व अनुमानही बदलणार आहे. प्रत्यक्ष आकृती काढून पडताळून पाहा.

(10) $\sqrt{-1}$ ही वास्तव संख्या नाही. इमॅजिनरी संख्या आहे. वास्तव संख्यांना लागू असणारे सर्व नियम इमॅजिनरी संख्यांनाही लागू पडतीलच असे नाही. चूक पायरी (3) मध्ये आहे.

(13) वर्गमूळ काढताना + व - दोन्ही चिन्हे विचारात घेणे आवश्यक. तसे घेतल्यास $a - c = \pm (b - c)$ यातील $a - c = -(b - c)$ म्हणजे $a - c = -b + c$ म्हणजे $a + b = c$ हे सुसंगत उत्तर घ्यावे. तपशिलासाठी चकवा 5 चे उत्तर पाहा.

(14) आपण भागाकार करतो म्हणजे नेमके काय करतो हे प्रथम समजावून घेणे आवश्यक आहे. 40 ला 8 ने भागणे म्हणजे 40 चे आठचा एक गट असे किती गट तयार होतील हे पाहणे. 40 मध्ये 4 दशक व शून्य सुटे आहेत. आपण प्रथम 4 दशकापासून आठचे किती गट होतात ते पाहतो. पूर्ण गट होऊन उरतील त्या दशकाचे सुटे करतो व दिलेले सुटे त्यात मिळवून पुन्हा सुट्याचे आठचे किती गट होतात ते पाहतो. दिलेल्या उदाहरणात 4 दशकापासून आठचा एकही गट मिळत नाही. म्हणून 4 दशकाचे 40 सुटे व दिलेले शून्य सुटे त्यात मिळवून त्याचे आठचे किती गट होतात ते पाहणे. 8 चे 5 गट पडत असताना 4 गट पाडून उरलेल्या बाकीस पुन्हा भागणे म्हणजे पहिल्या भागाला आपण दशकाचे स्थान दिल्यासारखे होते ही चूक आहे. म्हणून मोठ्यात मोठा भाग लावणे आवश्यक असते.

अशी चूक केली तर होणारा आणखी एक घोटाळा (चकवा) पाहा.

```
6) 186 ( 211
   12
   --
    6
    6
   --
   06          ∴ 186 ÷ 6 = 211
    6
```

(15) या चकव्यात सुरवातीला दिलेल्या नियमातील काही अटी दिलेल्या नाहीत त्यामुळे हा घोटाळा झाला आहे. तो नियम असा हवा – जर $a^x = a^y$, $a \neq 1$ तर $x = y$. आता $a \neq 1$ ही अट का आवश्यक आहे ते पाहा. 1 या संख्येचे सर्व घात 1 च येतात. $1^0=1$, $1^1=1$, $1^2=1$, $1^3=1$ .. वगैरे. 1 च्या विशिष्ट गुणधर्मामुळे जर $a^x = a^y$ जर $x = y$ या नियमात $a \neq 1$ ही अट न घातल्यास विसंगती प्राप्त होते. विसंगती टाळण्यासाठी आपण नेहमीच्या व्यवहारातही जशा अटी घालतो तशा अटी गणितातही घालणे आवश्यक असते. यासाठी $a \neq 1$ ही अट येथे घालणे आवश्यक आहे.

(16) या चकव्यातील चूक मोठी मजेशीर आहे. पैसे देऊन घेतलेल्या वस्तूच्या बदलात दुसरी त्याच किंमतीची वस्तू बदलून घेण्यास हरकत नाही. आमच्या गणोबांनी घेतलेल्या अर्धा किलो बर्फीचे पैसे दिले नाहीत व त्याच्या बदल्यात पेढ्याचा सौदा केला आहे.

(17) या चकव्यातील चूक दोन्ही बाजूस ($a-x$) ने भागून काढलेल्या अनुमानात आहे. $x > a$ दिलेले आहे. त्यामुळे $a-x$ ही ऋण संख्या आहे. असमानतेस ऋण संख्येने गुणल्यास अथवा भागल्यास असमानता कायम न राहता त्यातील संबंध बरोबर उलटा (विरुद्ध) होतो. त्यामुळे ($a-2$) ने भागल्यावर $x > a + x$ हे अनुमान न रहाता $x < a + x$ असे अनुमान मांडावयास हवे.

उदा. $-4 < 8$ याच्या दोन्ही बाजूस (-2) ने भागून, $2 > -4$ असे येते $2 > -4$ असे मांडणे चूक आहे. याबाबतचा सर्वसामान्य नियम असा

जर $x > a$ तर $xk > ak,\ k > 0$

$xk < ak,\ k < 0$.

(18) या चकव्यातील चूक पुन्हा ($a - x$) या ऋण संख्येने असमानतेस भागून काढलेल्या अनुमानात आहे. अनुमान $x > a + x$ ऐवजी $x < a + x$ हवे. चकवा 17 च्या उत्तरात अधिक स्पष्टिकरण आहे.

(19) या चकव्यातील चूक $a-b-c$ या शून्य किंमत असणाऱ्या संख्येने भागाकार केल्यामुळे आली आहे. शून्याने भागण्यासंबधी सविस्तर विवेचन चकवा 2 चे उत्तरात दिले आहे.

(20) या चकव्यात वर्गमूळ काढल्यावर अधिक व उणे दोन्ही चिन्हे घेतली नाहीत ही चूक आहे. अधिक माहितीसाठी चकवा 5 चे उत्तर पाहा.

(21) या चकव्यातील चूक आकृती काढण्यात आहे. प्रत्यक्ष आकृती काढल्यास रेख PF ही B या बिंदूतून जाते. रेख PF वर्तुळांना M व N या बिंदूत छेदतच नाही.

(22) समीकरण सोडविताना वर्ग केल्यामुळे नवीन येणाऱ्या समीकरणांचा सत्यता संच मूळच्या समीकरणाच्या सत्यता संचापेक्ष विस्तारीत होतो. या विस्तारीत संचात मूळच्या समीकरणाचे उत्तर असणारे घटक व इतरही घटक असतात. हे जादा घटक अर्थातच मूळच्या समीकरणाचे समाधान करणार नाहीत. म्हणून विस्तारीत संचातील दिलेल्या समीकरणाचे समाधान करणारे घटक फक्त आपण दिलेल्या समीकरणाचे उत्तर म्हणून निवडतो. विस्तारीत संच कसा येतो याचे

स्पष्टीकरण चकवा 5 च्या उत्तरात दिले आहे.

(23) योगायोगाने काही घटना काही मर्यादित बाबतीत सत्य ठरल्या तर त्याला नियम म्हणता येत नाही. हीच घटना बंड्याच्या उदाहरणांबात झाली आहे. अंश व छेद यांतील समाईक अंक घालवून येणारे उत्तर व प्रत्यक्ष भागाकार करून येणारे उत्तर ही सारखी येतात हे फक्त या विशिष्ट उदाहरणाच्या बाबतीत खरे आहे. अन्य उदाहरणांना हे लागू पडत नाही. त्यामुळे बंड्याचे उत्तर बरोबर येत असले तरी रीत चुकीची आहे म्हणून तो चूक आहे म्हणणेच योग्य होय. हीच रीत वापरून इतर ठिकाणी त्याला चुकीचे उत्तर मिळेल.

उदा. $\frac{13}{39} = \frac{1}{9}$ $\frac{12}{24} = \frac{1}{4}$

येथे बंड्याच्या पद्धतीने उत्तर चुकीचे मिळते. गणितात रीत म्हणजेच विचार करण्याची पद्धती अधिक महत्त्वाची आहे. बंड्याच्या पद्धतीने फक्त अगदी अल्प उदाहरणे योगायोगाने बरोबर येतील. परंतु बाकी असंख्य उदाहरणे चुकणार आहेत. म्हणून उत्तर बरोबर असले तरी रीत चुकीची असल्याने हे उदाहरण चूकच द्यावे लागेल.

(24) या चकव्यात $(4x-40)$ ची किंमत शून्य नाही असे धरून भागाकार केला आहे ही चूक आहे. भागाकार फक्त शून्येतर संख्येने करता येतो. सविस्तर विवेचनासाठी चकवा 5 चे उत्तर पाहा.

(25) $x-a-b$ ची किंमत शून्य नाही असे धरून भागाकार केला ही चूक आहे.

(26) हिशोब असा हवा : दुकानदारास 25 रुपये मिळाले, गड्यास 2 रुपये मिळाले, 3 रुपये बना, टोना व मनास परत मिळाले. एकूण रुपये तीस. व्यवहार मुले, मालक व गडी यांच्यामध्ये झाला आहे. किंवा मुलांना तीन रुपये परत मिळाल्यावर त्यांनी दिलेल्या 27 रुपयांचा हिशोब करायला हवा. तो म्हणजे 25 रु. दुकानदार + 2 रुपये गडी.

(27) (1) व (2) ही दिलेली विधाने सुसंगत हवीत. ती नाहीत ही या चकव्यातील

चूक आहे. गुणोत्तर (1) च्या दोन्ही वाजूतील अंशात व छेदात मिळवून गुणोत्तर (2) मिळते. पण अशामुळे गुणोत्तराची समानता राहत नाही. उदा. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ दोन्ही वाजूंच्या अंशात व छेदात 2 मिळवून काय येते ते पाहा.

$$\frac{1+2}{2+2} = \frac{3}{4} \quad \frac{2+2}{4+2} = \frac{4}{6} \quad \frac{3}{4} \text{ व } \frac{4}{6}$$

हे समान नाहीत हे कृपया ध्यान्यात घ्यावे. हीच गोष्ट बरोबर या चकव्यात दिलेल्या दोन विधानांबाबत झाली आहे. त्यामुळे दिलेल्या दोन चुकीच्या विधानांपासून वरोवर गणित करूनही विसंगत अनुमान येणार हे उघड आहे.

(28) $(x-5)(x-9)=0$ यावरून काढावयाचे अनुमान महत्त्वाचे आहे. यावरून काढलेले अनुमान x=5, x=9 हे बरोबर नाही. ते x=5 किंवा x=9 असे हवे. ज्यावेळी x हा समीकरणामध्ये येतो त्यावेळी आपण त्याला चल असे म्हणतो. म्हणजे x वास्तव संख्या संचातील कोणतीही किंमत धारण करू शकतो. यापैकी कोणत्या किंमती धारण केल्या असता त्या समीकरणाचे समाधान होते हे शोधणे म्हणजे समीकरण सोडविणे. त्यामुळे समाधान करणाऱ्या किंमती एकमेकावरोवर आहेत असे अनुमान काढणे चूक आहे. x=5 किंवा x=9 या अनुमानाचा अर्थ 5 किंवा 9 या किंमती x ने धारण केल्यास समीकरणाचे समाधान होते.

(29) या चकव्यात सुरवातीची दिलेली दोन समीकरणेच $x+y=5$ व $x+y=8$ ही विसंगत आहेत. एकसामयिक समीकरणामध्ये दोन्ही समीकरणांचे एकाच वेळी समाधान करणारी (x,y) ची किंमत काढावयाची असते. $x+y=5$ व $x+y=8$ ही समीकरणे विसंगत आहेत याचे कारण या दोन्ही समीकरणांचे एकाच वेळी समाधान करणारी x,y ची जोडी मिळू शकत नाही. चुकीची विधाने गृहीत धरून त्यापासून काढलेली अनुमानेही चूक निघतात.

(30) या चकव्यात $-a$ ने दोन्ही वाजूस गुणून काढलेल्या अनुमानात चूक आहे. ते अनुमान $-2an+a>-2an$ असे हवे. सविस्तर चर्चेसाठी चकवा 17 चे उत्तर पाहा.

(31) आकृती काढण्यात चूक आहे. प्रत्यक्ष आकृती काढून पाहा.

(32) $log(\frac{1}{2})$ ही संख्या ऋण आहे. त्यामुळे असमानतेच्या दोन्ही बाजूस ऋण संख्येने गुणल्यास असमानतेची दिशा बदलते. यानुसार $3 \, log \, (\frac{1}{2}) < 2 \, log \, (\frac{1}{2})$ असे अनुमान हवे. सवस्तिर चर्चा चकवा 17 चे उत्तर पहा.

(33) या चकव्यातील चूक समजण्यासाठी लॉगरिथमची व्याख्या लक्षात घेणे आवश्यक आहे. $y = log_a x$ येथे $a > 0, a \neq 0, x > 0$ या अटी महत्त्वाच्या आहेत. आता या अटींच्या संदर्भात $log(-1)$ ला अस्तित्त्व नाही. त्यामुळे $log(-1)$ च्या संदर्भात इतर काही नियम वापरून अनुमाने काढणेही चूकच ठरणार आहे.

(34) $log 1 = 0$ दोन्ही बाजूस $log 1$ ने भागले (म्हणजे शून्याने भागल) ही चूक या चकव्यात आहे.

(35) या चकव्यात बंड्याचे काहीच चुकलेले नाही. बंड्याचे बाबा भागिले म्हणजे उलटून गुणिले या एकाच प्रकाराने उदाहरण सोडवीत होते. त्यामुळे त्यांना अन्य सर्व रीती चूक वाटत होत्या. बंड्याने वेगळ्या पद्धतीने उदाहरण केल्याबद्दल त्याला शाबासकी देण्याची गरज होती. तसे न करता त्यांनी त्यांच्या वेळी शाळेत शिकलेल्या पद्धतीने उदाहरण केल्याने चूक दिले हे बरोबर नाही. एखादे उदाहरण सोडविण्याच्या अनेक पद्धती असू शकतात. काही वेळा काही शिक्षकही अशा प्रकारची चूक करतात. त्यांनी यापासून योग्य तो बोध घ्यावा.

(36) या चकव्यातील अनुमान क्र. (3) हे चुकीचे आहे. पुन्हा $r - t$ हे शून्येतर आहेत असे धरून आपण त्यांचा भागाकार केला. हीच चूक या चकव्यातील आहे.

(37) (1-1)=0 यांनी दोन्ही बाजूस भागले ही चूक आहे.

(38) $log \frac{1}{2}$ ही ऋण संख्या आहे. ऋण संख्येने असमानतेस गुणल्यावर अथवा भागल्यावर असमानतेची दिशा बदलते. त्यामुळे $2 < 1$ ऐवजी $2 > 1$ असे अनुमान हवे.

(39) वर्गमूळ घेताना धन व ऋण दोन्ही चिन्हांचा वापर करावा. $n + 1 = \pm (n + 2)$ असे घ्यावे. ऋण चिन्ह घेतल्यावर $n = -3/2$ मूळच्या पदावलीत टाकलेली किंमत मिळते.

(40) समीकरण सोडविताना वर्ग केल्यामुळे सत्यता संच विस्तारीत झाला आहे. विस्तारीत संचातील योग्य किंमत घेणे उचित. चकवा 22 चे उत्तर पाहा.

(41) चकवा 16 च्या उत्तराप्रमाणे यातील चूक आहे.

(42) $-a+b+c$ याची किंमत शून्य आहे. आणि शून्याने दोन्ही बाजूस भागण्यात चूक झाली आहे.

(43) आकृती काढण्यात चूक आहे. बाजू AB व बाजू CD यांचे लंबदुभाजक ABCD चौकोनाबाहेर मिळतात. प्रत्यक्ष आकृती काढून पाहा.

(44) या चकव्यातील चूक ही वर्गमूळ काढताना धन व ऋण दोन्ही वर्गमुळे विचारात घेतली नाहीत यात आहे. सविस्तर चर्चेसाठी चकवा 5 चे उत्तर आवश्यक वाटल्यास पाहावे.

(45) या चकव्यातही समीकरण सोडविताना आपण वर्ग केल्यामुळे सत्यता संच विस्तारीत झाला आहे. समीकरणाचे समाधान करताना $\sqrt{x}$ याची किंमत घेताना ती ऋण घेतल्यास समीकरणाचे समाधान झाल्याचे दिसून येते. $\sqrt{x}$ ची धन किंमत घेतल्यास $3\sqrt{x} + x + 2$ या तीन धन संख्यांची बेरीज शून्य येणे शक्य नाही.

(46) काढलेल्या पैशांची व शिल्लक पैशांची बेरीज सारखी यावी ही अपेक्षाच मुळात चूक आहे. इतर उदाहरणे घेऊन पडताळून पाहा. समजा, बँकेत 60 रुपये सुरवातीला ठेवले.

१)	रुपये 20 काढले.	शिल्लक रुपये 40
२)	रुपये 10 काढले	शिल्लक रुपये 30
३)	रुपये 30 काढले	शिल्लक रुपये 0
	काढलेले एकूण रुपये = 60	शिल्लक रुपयांची एकूण = 70 रुपये

(47) वर्गमूळ काढताना धन व ऋण किंमती घेणे आवश्यक असते ही नेहमीची

चूक या चकव्यात झाली आहे. सविस्तर उत्तरासाठी चकवा 5 चे उत्तर आवश्यक वाटल्यास पाहावे.

(48) काही वेळा उदाहरणात दिलेल्या बाबीच चुकीच्या असतात. त्यामुळे त्यापासून मिळणारी अनुमाने चुकीची आल्यास नवल काय? या चकव्यात 'a ही शून्येतर वास्तव संख्या आहे ' हेच विधान चूक आहे. ही संख्या, a ची किंमत शून्य झाल्यासच वास्तव होऊ शकते हे आपण सिद्ध करू शकतो. सिद्धता पाहा.

$$x^2 - ax = -\frac{1}{3}a^2$$

$$\therefore 3x^2 - 3ax = -a^2$$

$$\therefore a^2 - 3x\,a + 3x^2 = 0$$

हे समीकरण a मधील वर्गसमीकरण मानून सोडवू या. (यासाठी वापरावे लागणारे सूत्र पाहा) जर $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$

$$\text{तर } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$\therefore a = \frac{-(-3x) \pm \sqrt{(-3x)^2 - 4 \times 1 \times 3x^2}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{3x \pm \sqrt{9x^2 - 12x^2}}{2}$$

$$= \frac{3x \pm x\sqrt{-3}}{2}$$

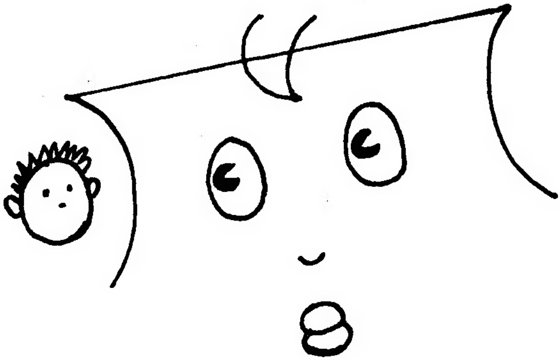
$$= \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2} \times x$$

यावरून x च्या शून्येतर कोणत्याही किंमतीसाठी a ही संख्या वास्तव येत नाही. ती इमॅजिनरी संख्या येते. $x=0$ घेतल्यासच a ही संख्या o बनून वास्तव संख्या होते. म्हणजे a ही शून्येतर वास्तव संख्या आहे ' हे गृहितकच चूक आहे.

(49) येथे $\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} = 0$ या संख्येने भागण्यात चूक झाली आहे. त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे या संख्याच आहेत. त्यामुळे शून्याने भागण्यास बंदी

असणाऱ्या संख्यांचा नियम त्यांनाही लागू आहेच. हा नियम पाळला गेला नाही हीच या चकव्यातील चूक आहे.

(50) या चकव्यातील चूकही वर्गमूळ घेताना धन व ऋण किंमती न घेण्यात आहे. $(1-\sin^2 x)^{3/2}$ यामध्ये आपण $(1-\sin^2 x)$ चा घन करून मग वर्गमूळ घेत असतो. वर्गमुळाची ऋण किंमत घेतल्यास विसंगती टळते. $x=\pi$ टाकल्यावर $(1-\sin^2 x)^{3/2}$ ची किंमत $(1-0)^{3/2}=1$ घेण्याऐवजी -1 घेतल्यास उजवी व डावी बाजू समान येते. त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे या संख्याच आहेत. त्यांनाही संख्यांचे सर्व नियम लावणे आवश्यक असते याचा विसर पडता कामा नये.





पु. ग. वैद्य

- एम्. एस्सी., एम्. एड.
- लक्ष्मणराव आपटे प्रशाला व ज्युनियर कॉलेजचे संस्थापनेपासून प्राचार्य.
- गणित व शास्त्र विषयांचा २५ वर्षांहून अधिक अध्यापन अनुभव.
- आठवी ते बारावीपर्यंतच्या गणिताच्या पाठ्यपुस्तकाचे लेखन.
- गणित, शास्त्र व शिक्षण या विषयांवर विविध कालिकांतून लेखन.
- विज्ञानकथा, गणित काल्पनिका यांवर अनेक पुस्तके प्रकाशित.
- उत्तम वक्ते, गणित, विज्ञान व शिक्षण यांवर पॉप्युलर व्याख्याने.
- महाराष्ट्र गणित अध्यापक महामंडळाच्या प्रथम अधिवेशनाचे अध्यक्ष.
- भारत सरकारतर्फे सेंटर फॉर ॲडव्हान्समेंट ऑफ मॅथेमॅटिक्स एज्युकेशन ॲण्ड टेक्नॉलॉजी या इंग्लंडमधील संस्थेत प्रशिक्षणासाठी निवड व एक वर्षाचा अनुभव.
- पंचवीसपेक्षा जास्त वेळा रक्तदान केल्याबद्दल महाराष्ट्राच्या राज्यपालांकडून गौरव व रौप्यपदक
- शैक्षणिक, सामाजिक व विद्यार्थी यांच्या संबंधात अनेक संस्थांचे संस्थापक, पदाधिकारी व विश्वस्त.
- १९७२ च्या पाकिस्तान युद्धाचे वेळी नागरी संरक्षण कार्यातील विशेष कामगिरीबद्दल संग्राम पारितोषिक.
- शैक्षणिक निबंध व शैक्षणिक कार्याबद्दल अनेक पारितोषिके व पुरस्कार.
- शिक्षणातील कार्याबद्दल देण्यात येणाऱ्या आचार्य अत्रे पुरस्काराचा पहिला मानकरी.
- शिक्षणातील विशेष कार्याबद्दल ५ सप्टेंबर १९८५ रोजी दिल्ली येथे राष्ट्रपतींच्या हस्ते राष्ट्रीय पुरस्कार.
- हरवलेले शोध या विज्ञान काल्पनिकांच्या पुस्तकास मराठी साहित्य परिषदेकडून पुरस्कार.

इंद्रायणी साहित्य
पुणें

मुल्य वीस रुपये